EINE ERWEITERTE THEORIE
DER BIEGESCHWINGUNG STABFÖRMIGER PROBEN
UND UNTERSUCHUNG
DES VISKOELASTISCHEN VERHALTENS VON POLYMEREN

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Frank-Peter Wolf

aus Leipzig

1969

EINE ERWEITERTE THEORIE
DER BIEGESCHWINGUNG STABFÖRMIGER PROBEN
UND UNTERSUCHUNG
DES VISKOELASTISCHEN VERHALTENS VON POLYMEREN

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Frank-Peter Wolf

aus Leipzig

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

1. Gutachter: Prof. Dr. K. Ueberreiter

2. Gutachter: Prof. Dr. W. Stein

Eingereicht am 15. Mai 1969

Letzte mündliche Prüfung am 21. Juli 1969

Promotion am

27. OKT. 1969

Diese Arbeit entstand unter Anleitung von Herrn Professor Dr. rer. nat. K. Ueberreiter im Fritz-Haber-Institut der Max-Planck-Gesellschaft zu Berlin-Dahlem.

Herrn Prof. Dr. K. Ueberreiter möchte ich an dieser Stelle für Themenstellung und wissenschaftliche Betreuung, für Diskussionen, Anregungen und wertvolle Hinweise besonders danken.
Dem Fritz-Haber-Institut bin ich dankbar für die Gewährung eines Stipendiums, für die Stellung von Arbeitsplatz und Apparatur sowie dafür, daß ich die Möglichkeit zur Benutzung der Rechenanlage des Instituts hatte.
Herrn Dr. J. Springer bin ich verbunden für die Durchführung der viskosimetrischen Molekulargewichtsbestimmung.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung 1

I. Messung des Elastizitätsmoduls und der Dämpfung von Polymeren 4

1. Grundlagen des viskoelastischen Verhaltens 4
2. Abhängigkeit der viskoelastischen Größen 7
3. Meßgrößen und Meßmethoden 9
4. Probenlagerung 10
5. Resonanzerzeugung und -bestimmung 14
6. Probestäbe, Zusatzmassen 18
7. Physikalisch-chemische Daten des Polymeren 20
8. Meßapparatur, mechanischer Teil 23
9. Meßapparatur, elektrischer Teil 24
10. Meßapparatur, thermischer Teil 25
11. Anregungs- und Resonanzamplitude, Grenze der Methode 27
12. Durchführung der Messungen 31

II. Elementare Theorie der Biegeschwingung 36

1. Differentialgleichung 36
2. Elastizitätsmodul und Resonanzfrequenzen 38
3. Resonanzdubletts elliptischer Stäbe 40
4. Eigenwerte 41
5. Schwingungsknoten, Wellenlänge 45
6. Trägheit von Zusatzmassen an den Stabenden 47
7. Eigenwerte für Stäbe mit Zusatzmassen 48
8. Schwingungsknoten von Stäben mit Zusatzmassen 52
9. Anwendung der einfachen Biegeschwingungstheorie 55

III. Erweiterte Theorie der Biegeschwingung 59

1. Verformung der Stabelemente durch Scherkräfte 61
2. Erweiterte Differentialgleichung 63
3. Elastizitätsmodul und Resonanzfrequenzen 64
4. Eigenwertparameter und charakteristische Gleichung 66
5. Eigenfunktionen für Stäbe mit Zusatzmassen 67
6. Eigenwerte für Stäbe mit Zusatzmassen 68
7. Berechnung der Eigenwerte 74
8. Grenzwellenlänge 76

IV. Bestimmung der Konstanten κ 78
1. Schubspannungskomponenten 78
2. Ermittlung von κ aus der Formänderungsarbeit 86
3. Numerische Bestimmung von κ 87
4. Poissonkonstante m der untersuchten Stäbe 92

V. Schwingungsdämpfung in Polymeren 95
1. Harmonischer Oszillator als Dämpfungsmodell 96
2. Viskoelastische Dämpfungsmodelle 98
3. Schwingungsgleichungen und Dämpfungsverhalten 100
4. Einfluß der Dämpfung auf die Resonanzfrequenz 103

VI. Meßergebnisse und Auswertung 106
1. Gültigkeit der entwickelten Theorie 106
2. Bedeutung des komplexen E-Moduls 108
3. Messung der viskoelastischen Größen 109
4. Auswertung der Messungen 112
5. Fehler-Betrachtung 113
6. Diskussion der Meßergebnisse 115
7. Schlußbemerkungen 118

ALGOL-Programm zur Berechnung der Eigenwerte 121

Zusammenfassung 127

Literaturverzeichnis 129

Graphische Darstellungen 1 - 25

Einleitung

Das viskoelastische Verhalten von Polymeren kann mit Hilfe verschiedener mechanisch-dynamischer Verfahren untersucht werden. Eine häufig angewandte Methode ist die der Biegeschwingungsresonanz stabförmiger Materialproben. Aus den Stababmessungen und den Resonanzfrequenzen der verschiedenen Schwingungsordnungen läßt sich der Elastizitätsmodul (Young-Modul) E, gleichzeitig aus den Halbwertsbreiten der Resonanzkurven der Dämpfungsfaktor d der Probe bestimmen.

Bisher werden die Berechnungen des Elastizitätsmoduls fast ausschließlich im Rahmen der elementaren Biegeschwingungstheorie durchgeführt, die nur die eine elastische Konstante E berücksichtigt. Der Einfluß von Schubspannungen (Torsions- oder Gleitmodul G) oder Querkontraktion (Poissonkonstante m) im gebogenen Stab werden vernachlässigt. Deshalb ist die einfache Theorie nur auf lange, dünne Stäbe und niedrige Schwingungsordnungen n anwendbar.

Derartige Stäbe sind bei Polymeren nur im eingefrorenen Zustand genügend formstabil. Sobald ihre Temperatur bis in das Erweichungsgebiet steigt, machen Fließerscheinungen weitere Biegeresonanzmessungen unmöglich. -
Dagegen behalten kurze, dicke Stäbe ihre Gestalt bis zu wesentlich höheren Temperaturen; die Berechnung ihres Elastizitäsmoduls setzt aber eine verbesserte Theorie voraus.

Eine verallgemeinerte Differentialgleichung der Biegeschwingung gibt Timoschenko an; sie enthält neben dem Elastizitätsmodul E den Torsionsmodul G und eine zusätzliche Konstante κ (dort λ genannt), die von der Form des Probenquerschnitts abhängt. Diese Konstante soll der Verteilung von Schubspannungen über den Querschnitt des gebogenen Stabes Rechnung tragen; sie wird aber ohne Berücksichtigung der Querkontraktionskonstanten m berechnet und ist daher einigermaßen willkürlich. -
Goens hat die Differentialgleichung für den einfachsten Fall streng gelöst und daraus Näherungsformeln für den praktischen Gebrauch entwickelt. -

In den folgenden Ausführungen soll die erweiterte Differentialgleichung der Biegeschwingung für einen komplizierteren Fall exakt gelöst werden; eine Entwicklung von Näherungsformeln ist heute nicht mehr nötig, weil die umfangreichen numerischen Rechnungen bei einer praktischen Anwendung der exakten Theorie mit Hilfe elektronischer Rechenanlagen durchgeführt werden können.

Weiter wird der Versuch unternommen, durch Nachrechnen der Schubspannungskomponenten für den Querschnitt eines gebogenen zylindrischen Stabes aus den allgemeinen Spannungs-Dehnungs-Beziehungen die bisher willkürliche Konstante κ als Funktion der Poissonkonstanten m darzustellen.

Damit ist dann - in Übereinstimmung mit der allgemeinen Elastizitätstheorie - eine exakte Beschriebung der Biege-

schwingung von isotropen stabförmigen Proben an Hand der Stabdimensionen und zweier elastischer Konstanten möglich, z.B. Elastizitätsmodul E und Poissonkonstante m aus dem Tripel (E,G,m). -

Da die erweiterte Zwei-Konstanten-Theorie zur Berechnung der einen Konstante E aus experimentell gemessenen Biegeresonanzen benutzt werden soll, wird der Einfluß einer Variation der anderen Konstante m auf den Wert von E überprüft.

Ziel der Arbeit ist es zu zeigen, wie der Elastizitätsmodul E von Polymeren mit Biegeresonanzen durch Verwendung kurzer, dicker Stäbe bis weit in das Erweichungsgebiet hinein genau gemessen werden kann, ohne daß die Querkontraktionskonstante m vorher exakt bestimmt werden muß.

Elastizitätsmodul E und Dämpfungsfaktor d von Polymethylmethacrylat PMMA sollen an zahlreichen Proben in einem weiten Temperatur- und Frequenzbereich untersucht werden. - Ferner sind verschiedene Modelle für die Dämpfung von Polymeren und ihr Einfluß auf die Resonanzfrequenz der Biegeschwingung zu diskutieren. -

I. Messung des Elastizitätsmoduls und der Dämpfung von Polymeren

1. Grundlagen des viskoelastischen Verhaltens

Die Aggregatzustände makromolekularer Stoffe sind nicht so klar gegeneinander abzugrenzen wie bei Mikromolekülen. Alle Übergänge erfolgen innerhalb von häufig weiten Temperaturintervallen. -
Im Gebiet tiefer Temperaturen sind Polymere glasig oder - meist nur partiell - kristallin erstarrt. Bei Erwärmung gehen sie oberhalb der Glastemperatur (Einfriertemperatur) oder der Schmelztemperatur der Kristallite in einen Zustand über, den zuerst UEBERREITER als "Flüssigkeit mit fixierter Struktur" bezeichnet hat[72, 73]. Der allmähliche Übergang erfolgt durch das Auftauen von Beweglichkeiten innerhalb der Moleküle.

Bei weiterer Erwärmung im Erweichungsgebiet kann die fixierte Struktur nach und nach verschwinden, und der Stoff bildet oberhalb der Fließtemperatur eine zähviskose Schmelze. -
Glas- und Fließtemperatur sind bei allen Polymeren vom Molekulargewicht abhängig; mit zunehmender Kettenlänge wird das zwischen ihnen liegende Erweichungsgebiet immer breiter. Ein derartiges Zustandsdiagramm für Polymethylmethacrylat PMMA findet sich bei[74]. - Glas- und Fließtemperatur von Polymeren lassen sich bei weitem nicht so genau bestimmen wie die Phasenübergangs-Temperaturen mikromolekularer Stoffe. -

Auch das elastische Verhalten von Polymeren weist im Vergleich mit anderen Werkstoffen eine Reihe von Besonderheiten auf. Neben der bei allen kristallin oder glasig erstarrten Stoffen beobachteten Energieelastizität, die bei Makromolekülen auf

der Verbiegung von Valenzwinkeln beruht[51)], kann man bei makromolekularen Verbindungen mit genügend hohem Molekulargewicht (genügender Kettenlänge) im Erweichungsgebiet Entropieelastizität (Gummielastizität) beobachten, die durch Streckung der geknäuelten Makromoleküle hervorgerufen wird. Besonders ausgeprägt ist diese Erscheinung bei vernetzten Polymeren; bei unvernetzten wird sie von viskosen Fließvorgängen überlagert[51)].

Thermodynamisch ergibt sich der Unterschied beider Elastizitätsarten aus einer Betrachtung der Änderung der Freien Energie F in Abhängigkeit von Volumen V und absoluter Temperatur T[1, 29)]:

$$F(T,V) = U - TS$$

$$\delta Q_{rev} = dU + pdV = TdS \quad \text{(2. Hauptsatz)}$$

mit Wärmemenge Q, Innerer Energie U, Entropie S und Druck p.

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T dV = dU - TdS - SdT = -pdV - SdT$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = -p = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T - T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \sigma = E\cdot\varepsilon$$

Die Änderung der Freien Energie mit dem Volumen bei konstanter Temperatur entspricht einer Zugspannung σ (negativer Druck), der nach dem Hooke'schen Gesetz eine Dehnung $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ proportional ist. -

Mit $dV = f\cdot dl$ (Probenquerschnitt f) bekommt man die Arbeitsbilanz: $\left(\frac{\partial U}{\partial l}\right)_T dl - T\left(\frac{\partial S}{\partial l}\right)_T dl = \sigma\cdot f\cdot dl = K\cdot dl = dA$.

Bei Dehnung um Δl wird die geleistete Arbeit ΔA in Form von Innerer Energie $+\Delta U$ oder durch Änderung der Entropie $-T\Delta S$ im Körper gespeichert; dabei ist ΔS wegen des Übergangs der Kettenmoleküle in einen Zustand geringerer Unordnung negativ, also $-T\Delta S$ ebenfalls positiv. -

Energieelastizität ist bei Polymeren gekennzeichnet durch $E = 10^{10} \ldots 10^{11} \frac{dyn}{cm^2}$, kleine reversible Dehnungen $\varepsilon < 1\%$ und

geringe Abnahme des Elastizitätsmoduls bei Temperaturerhöhung. Entropieelastizität hat Werte im Bereich $E = 10^6 \ldots 10^8 \frac{dyn}{cm^2}$, große reversible Dehnungen von mehreren Hundert % und einen positiven Temperaturkoeffizienten des Elastizitätsmoduls[1,51], wobei wegen $K \sim T$ angenähert gilt: $E \sim T$, denn der Entropieterm $-T\left(\frac{\partial S}{\partial l}\right)_T$ überwiegt den Energieterm $\left(\frac{\partial U}{\partial l}\right)_T$ hier bei weitem.

Die Temperaturabhängigkeit des E-Moduls resultiert aus der von Energie- und Entropieterm, ferner muß ein Korrekturfaktor $(1 + \alpha \cdot \Delta T)^{-1}$ zur Berücksichtigung der thermischen Ausdehnung der Probe beachtet werden:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\frac{K}{f}}{\frac{\Delta l}{l}} = K \cdot \frac{l}{f \cdot \Delta l} = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial l}\right)_T - T \cdot \left(\frac{\partial S}{\partial l}\right)_T\right] \cdot \frac{l}{f \cdot \Delta l}$$

$$\frac{l}{f \cdot \Delta l} = \frac{l_0(1+\alpha \cdot \Delta T)}{f_0(1+\alpha \cdot \Delta T)^2 \cdot \Delta l} = \frac{l_0}{f_0 \cdot \Delta l} \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta T)^{-1}$$

Der lineare Ausdehnungskoeffizient α ergibt sich aus der Temperaturabhängigkeit $\varrho(T)$ der Dichte; der Korrekturfaktor $(1 + \alpha \cdot \Delta T)^{-1}$ tritt auch bei der Berechnung von E nach der Biegeschwingungstheorie auf. -

Die "innere Reibung" von Polymeren bedingt besonders im Übergangsgebiet eine erhebliche Dämpfung, wenn die Proben mit hinreichend kleinen reversiblen Deformationen elastisch beansprucht werden. Die irreversible Umwandlung von mechanischer Energie im Wärme ruft zwar z.B. bei Metallen nur geringe Dämpfungen hervor: Dämpfungsfaktor $d = 10^{-5} \ldots 10^{-3}$ nach[49], aber bei Polymeren treten durch Bewegungen von Seitengruppen oder Segmenten der Hauptkette schon im Glaszustand Dämpfungsfaktoren von $10^{-2} \ldots 10^{-1}$ auf; im Übergangsgebiet auch als Folge von Fließerscheinungen sogar von $d \approx 1$. Derartige Werte erreicht kein anderer gebräuchlicher Werkstoff[47, 52]. -

Zu diesen Prozessen gehören temperaturabhängige Relaxationszeiten, die ein ganzes Relaxationsspektrum ergeben. -

Daher sind die elastischen und viskosen Kenngrößen von Polymeren nicht nur temperatur- sondern auch zeitabhängig. - Außerdem hängen sie von der Beanspruchungsart ab. Dies tritt zum Beispiel im Relaxationsverhalten der einzelnen elastischen Moduln beim Übergang zum Erweichungsgebiet in Erscheinung. Der Torsionsmodul G (Verdrillung der Probe) durchläuft bereits bei tieferer Temperatur als der Elastizitätsmodul E (Verlängerung oder Biegung der Probe) ein Dispersionsgebiet[36], dementsprechend relaxiert G bei konstanter Temperatur im Erweichungsgebiet schon bei höheren Frequenzen als E[30, 36]. - Allgemein sind Temperaturerhöhung und Frequenzerniedrigung einander im Gang der Moduln äquivalent[61]. -

Statische Messungen genügen demnach zur Erforschung von Zustand und Struktur eines makromolekularen Stoffes nicht, aber die "mechanische Spektroskopie" ist ein wichtiges Hilfsmittel dafür.

2. Abhängigkeit der viskoelastischen Größen

Die Verknüpfung von Elastizitätsmodul E und Dämpfungsfaktor d erfolgt über die komplexe Darstellung[1,3,25,37,48,50,69,75]:

$$E = E' + iE'' = E' + i \cdot d \cdot E' \quad \text{mit} \quad d = \frac{E''}{E'} .$$

Beide Größen können in einer dynamischen Messung nebeneinander bestimmt werden[37]. -

Der komplexe Elastizitätsmodul von Polymeren ist bei homopolymeren Stoffen außer von Temperatur und Beanspruchungszeit bezw. -frequenz noch vom Molekulargewicht abhängig. Bei Co-Polymeren ("innere Weichmachung") richtet er sich außerdem nach den Mengenverhältnissen der Partner[51, 62]. - Neben der inneren Weichmachung beeinflußt den E-Modul auch die äußere Weichmachung (durch Lösungsmittel mit sehr niedrigem Dampfdruck) oder der Zusatz harter Füllstoffe. Ebenfalls wie ein harter Füllstoff, eingebettet in eine einheitliche amorphe Phase, wirken die Kristallite bei partiell kristallinen Polymeren[51, 62]. -
Ferner beeinflußt das Vorhandensein von mechanischen Spannungen oder von Inhomogenitäten den komplexen E-Modul; Ausheil- und Tempereffekte können so verfolgt werden[10, 78]. -

Bei hohen Beanspruchungsfrequenzen reagiert der E-Modul auf Einzelprozesse innerhalb der Makromoleküle (Rotation einzelner Kettenmoleküle), bei niedrigen Frequenzen auf zeitliche Folgen von Einzelprozessen: Konformationsänderungen durch Bewegung von Kettensegmenten, "Laufmascheneffekte"[39]. -

Die mechanische Spektroskopie erlaubt also zahlreiche Rückschlüsse auf den zulässigen Temperatur- und Beanspruchungsbereich sowie auf die technischen Verarbeitungs- und Einsatzmöglichkeiten von beliebigen Kunststoffen (und anderen Werkstoffen) - oder von speziellen Proben eines Stoffes. - Außerdem gewährt sie Einblicke in die molekulare Struktur der Polymeren[51, 62]. -

3. Meßgrößen und Meßmethoden

Rein statische Einzelmessungen des E-Moduls aus Zug-, Druck- oder Biegeversuchen sind bei Polymeren wenig sinnvoll, denn ihr E-Modul ist - außer von der Temperatur - von Beanspruchungsart und -zeit abhängig.

In quasistatischen Verfahren mißt man den Relaxationsmodul $M_r(t)$ aus der zeitlichen Spannungsrelaxation bei konstanter Dehnung und den Kriechmodul $M_k(t)$ aus der zeitlichen Dehnungszunahme bei konstanter Spannung; für Versuchszeiten t, die klein gegen die niedrigste Relaxationszeit τ_R des Polymeren bei der entsprechenden Temperatur sind, kommt man damit zum zeit- bezw. dehnungsabhängigen Elastizitätsmodul, der bei kleinen Meßzeiten bezw. kleinen Dehnungen dem üblichen frequenz- und temperaturabhängigen E-Modul entspricht[63]. -

Alle mechanisch-dynamischen Untersuchungsmethoden lassen sich nur innerhalb gewisser Frequenzbereiche anwenden. Die wichtigsten Methoden sind mit dem jeweils erfaßbaren Frequenzband:

$10^{-5}...10^{-1}$	Hz	periodisch sinusförmige Dehnbeanspruchung
$10^{-1}...10^{1.5}$	Hz	Torsionsschwingungen
$10^{+1}...10^{4.5}$	Hz	Biegeschwingungen
$10^{4}...10^{5}$	Hz	Longitudinalschwingungen
$10^{5}...10^{7}$	Hz	Ultraschall .

Bei allen aufgeführten Verfahren außer den Torsionsschwingungen, die zum Torsionsmodul G führen, mißt man den E-Modul[47].

Aus diesen Methoden wurde die Biegeschwingung stabförmiger Proben ausgewählt, die in der Praxis neben der Torsionsschwingung am häufigsten zu Untersuchungen benutzt wird[51].

Weil der E-Modul nach dem Hooke'schen Gesetz sowohl für Zug- als auch für Druckbeanspruchung definiert ist, kann er wegen des linearen Spannungsverlaufs auch aus der Biegung eines Stabes[63] ermittelt werden (s.S. 37). - Bei isotropen Stäben sind Longitudinal-, Torsions- und Biegeschwingungen voneinander unabhängig erregbar, solange die Wellenlänge im Medium nicht der Größe des Stabdurchmessers nahekommt[17, 34]. -

Bei nicht zu hoher innerer Dämpfung zeigen sinusförmig auf Biegung beanspruchte Stäbe beim Durchlaufen eines geeigneten Frequenzintervalls Resonanzen durch Ausbildung stehender Wellen. Dabei kann die elastische Wellenlänge etwa von der Länge des Stabes bis herab zu seiner Dicke reichen (s.S. 57). -

Durch Variation der Probenabmessungen[77] kann bei gleichem Material die Resonanzfrequenz der Grundschwingung erheblich verändert werden (hier etwa 1 : 100); die verschiedenen Schwingungsordnungen entsprechen einer Folge von Resonanzfrequenzen (hier: Grundschwingung bis maximal 8. Oberschwingung etwa wie 1 : 40). Auf diese Weise ist mit der Methode der Biegeschwingungsresonanzen ein größerer Frequenzbereich diskontinuierlich erfaßbar[69]. -

4. Probenlagerung

Die - für eine mathematische Darstellung sinnvolle - Lagerung von stabförmigen Proben der Länge l wird durch Randbedingungen beschrieben, die sich als Ableitungen $\left(\frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right)_{x_E}$ der Auslenkung y des Stabes senkrecht zu seiner Achsenrichtung x für die Stabenden $x_E = 0$ bezw. $x_E = l$ ergeben. Dabei bedeutet:

$(y)_{x_E} = 0$ keine Amplitude;

$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x_E} = 0$ keine Neigung;

$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_{x_E} = 0$ keine Krümmung bezw. kein biegendes Drehmoment;

$\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)_{x_E} = 0$ konstante Krümmung bezw. keine biegende Scherkraft. -

Je zwei beliebige der folgenden Lagerungen werden in der Praxis für die beiden Stabenden angewandt:

(a) fest eingespanntes Ende: Keine Amplitude, keine Neigung;

$(y)_{x_E} = 0$ und $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x_E} = 0$

(b) eingespanntes bewegtes Ende: keine Neigung, keine Scherkraft;

$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x_E} = 0$ und $\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)_{x_E} = 0$

(c) frei aufliegendes Ende: keine Amplitude, kein Biegemoment;

$(y)_{x_E} = 0$ und $\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_{x_E} = 0$

(d) freies Ende: kein Biegemoment, keine Scherkraft; dabei Lagerung des Stabes entweder in den Schwingungsknoten oder Einspannung am anderen Ende;

$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_{x_E} = 0$ und $\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)_{x_E} = 0$.

Mit Stäben, die an einem Ende fest eingespannt sind (a), arbeiten unter anderen[1, 31, 45, 50]. Das andere Ende ist dabei frei, nur bei sehr weichen Proben wird es gegebenenfalls auch eingespannt[1)]. Dann müssen Vorkehrungen zur Kompensation der Längenänderung bei Temperaturvariation getroffen werden. -

Durch sinusförmige Bewegung des eingespannten Probenendes

senkrecht zur Achsenrichtung (b) können Resonanzschwingungen erregt werden[3, 25, 27, 46, 48, 77]. Doch bereitet hierbei eine exakte Einhaltung der Sinusform Schwierigkeiten; außerdem muß auch die Randbedingung "keine Neigung" wirklich erfüllt werden. Deshalb ist nach[13] Methode (a) jedenfalls besser als (b). -

In beiden Fällen ist die Lage des Stabes mechanisch gut fixiert, und eine Längenänderung bei Temperaturvariation stört nicht. Der genaue Ort der Schwingungsknoten braucht nicht bestimmt zu werden. -

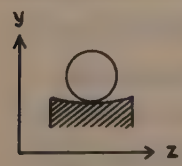
Sehr störend kann sich aber eine Temperaturänderung dann auswirken, wenn die thermischen Ausdehnungskoeffizienten von Einspannmaterial und Probe verschieden sind. Dies ist besonders für Polymerproben in Metalleinspannung unvermeidlich: Bei tiefen Temperaturen ist eine feste Einspannung des dünner werdenden Stabes nicht mehr gesichert; bei Erwärmung wird die gleichmäßige Querschnittsausdehnung behindert[69]. Außerdem läßt sich die "freie Länge" des Stabes nicht genau bestimmen, weil sich Querschnittskrümmungen bis in die Einspannung hinein fortsetzen können[40]. -

Zur exakten Erfüllung der mathematischen Voraussetzungen wäre es nötig, den Endquerschnitt ideal fest an eine ebene Befestigung zu kleben, was praktisch undurchführbar ist. Nur bei Verwendung einer festen Unterlage (Blech), auf die der zu untersuchende weichere Stoff aufgebracht wird, kann die Randbedingung gut realisiert werden[69]. -

Frei aufliegende Enden (c) lassen sich schlecht verwirklichen, denn die Lagerung muß sich genau am Stabende befinden. Jede Längenänderung des Stabes stört erheblich, und diese Lage hat nur geringe mechanische Stabilität. - Auch schräg angebrachte Lager aus dämpfendem Material sind nicht brauchbar, weil sie die Bedingung "keine Amplitude" nicht gut erfüllen. -

Lagert man dagegen einen Stab - beiderseits mit freien Enden - in den Schwingungsknoten (d), so sind die Randbedingungen sehr gut verwirklicht. Die Benutzung eines dämpfenden Materials ist dabei angebracht, denn so kann ein Energieaustausch mit der Probenhalterung fast völlig unterbunden werden[35, 49]. -
Viele Autoren wenden diese Lagerung an[6, 9, 14, 15, 33, 35, 49, 53, 66, 78]; besonders GOENS[15] weist darauf hin, daß diese Methode für eine mathematisch exakte Erfüllung der Randbedingungen die beste ist: deshalb wurde sie auch hier gewählt.

Vielfach werden die Proben in den Schwingungsknoten nicht auf eine dämpfende Unterlage gelegt, sondern an Fäden aufgehängt, so[6, 9, 10, 33, 49, 78]. Eine solche Aufhängung hat sich in der vorliegenden Untersuchung als mechanisch weniger stabil und ungünstiger in den Abmessungen wie im Temperaturverhalten herausgestellt. - Die besten Ergebnisse konnten hier mit



schwach gekrümmten schneidenartigen Lagern aus Silikonkautschuk erzielt werden. Die Lage des Stabes ist infolge der Krümmung auch in seitlicher (z-) Richtung stabil; die Dämpfungs-

eigenschaften sind gut, bleibende Deformationen der Lagerungen konnten nicht festgestellt werden, und der thermische Einsatzbereich erstreckt sich von etwa -50° bis über $+200^{\circ}C$. -

Eine gewisse Unbequemlichkeit liegt bei der Probenlagerung mit freien Enden (d) lediglich darin, daß der Ort der Schwingungsknoten durch Lösen einer transzendenten Gleichung bestimmt werden muß. - Die thermische Ausdehnung der Probe ist bedeutungslos, denn auch in naher Umgebung der Schwingungsknoten stört die dämpfende Lagerung wenig; bei niedrigen Schwingungsordnungen hat jedoch eine stärkere Lagerungsverschiebung erheblichen Einfluß auf die Resonanzfrequenz. Die Verstimmung nimmt mit der Länge der Probe zu, mit ihrem Durchmesser ab; sie kommt daher, daß dann die Randbedingungen nicht mehr erfüllt sind. Dabei ändert sich die Dämpfung nach den hier vorliegenden Messungen kaum; sie soll (bei Aufhängung an Drähten gemessen) bei stärkerer Verschiebung aus der Knotenlage zunehmen, und zwar bei dünnen Stäben stärker als bei dicken[9]. -

5. Resonanzerzeugung und -bestimmung

Eine stabförmige Probe kann direkt oder über ihre Lagerung zu mechanischen Schwingungen angeregt werden; ebenso kann ihr Resonanzverhalten registriert werden. -
Meist erzeugt man die Schwingungen elektrisch und wandelt sie auf geeignete Weise in mechanische um:

elektromagnetisch[1, 3, 10, 32, 43, 49, 50, 53, 77, 78]
piezoelektrisch[5, 6, 34, 49, 66, 67] oder vereinzelt
magnetostriktiv[33].

Die elektromechanische Umwandlung kann bei der Übertragung auf die Probe erfolgen oder schon vorher.

Elektromagnetische Schwingungserzeugung bei gleichzeitiger direkter Übertragung auf den Stab setzt eine Gegenüberstellung von Erregerspule und ferromagnetischem Material oder Induktionsspule voraus, wobei die einfachste Anordnung die ist, bei der am Probestab kleine Eisenmassen befestigt sind[1, 50, 78]. Zur piezoelektrischen Anregung mit direkter Übertragung verwendet man Schwingkristalle, die die Staboberfläche nahe einem Schwingungsknoten berühren[34]. -

Bereits umgewandelte mechanische Schwingungen können durch Bewegung des eingespannten Endes auf die Probe übertragen werden, ferner durch einen Faden, an dem die Probe in der Nähe eines Schwingungsknotens aufgehängt ist, oder z.B. durch die Schallwellen eines Lautsprechers[66, 67]. - Daneben kann ein Probestab auch direkt mechanisch (durch Exzenterbewegung) zu erzwungenen Schwingungen[31] oder (durch Anschlagen) zu freien[15] erregt werden. -

Die Schwingungsamplitude des Stabes läßt sich mit den angegebenen elektromechanischen Umwandlungen in eine elektrische Spannung transformieren; außerdem kann sie unter Umständen auch kapazitiv (Stabende als bewegte gegenüber einer zweiten festen Kondensatorplatte) beobachtet werden[43], ferner optisch mit dem Mikroskop[25, 46, 48, 77] oder akustisch durch Abstimmung auf maximale Lautstärke[15]. -

Nach der Entscheidung für die Biegeschwingung mit freien Enden erwiesen sich direkte elektromagnetische Anregung der Probe und elektromagnetische Aufnahme der Schwingungsamplitude als bester Weg. Die häufig angewandte indirekte Anregung

und Aufnahme über Fäden in oder nahe an den Schwingungsknoten ist für Oberschwingungen wenig geeignet; außerdem muß der für Messungen bei variabler Temperatur erforderliche Heizofen unnötig groß dimensioniert werden. -

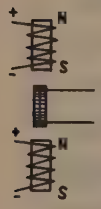
Der elektromagnetischen Methode wurde gegenüber der piezoelektrischen der Vorzug gegeben, weil sich eine Berührung der Probe mit Kristallen sicher stärker auf die Randbedingungen auswirkt als die Ankopplung über Magnetfelder. -
So bevorzugt z.B. SPINNER[66] zur mechanischen Anregung die Übertragung durch Schallstrahlung eines Lautsprechers gegenüber direktem mechanischem Kontakt, weil im letzteren Fall die Reproduzierbarkeit schlechter wird und eine Frequenzerhöhung auftritt.

Prinzipiell ist es gleichgültig, an welcher Stelle man den Stab zu Schwingungen anregt. Geeignet sind bei direkter elektromagnetischer Übertragung die Orte maximaler Amplitude. Diese Bedingung erfüllen die Stabenden für alle Schwingungsordnungen; deshalb wurden sie für die vorliegenden Untersuchungen genommen. -
Eine Erregung der Stabmitte[43] ist deshalb unpraktisch, weil sich ungeradzahlige Oberschwingungen (mit Knoten in der Stabmitte) nicht erzeugen lassen; die Resonanzfrequenz ändert sich aber gegenüber Endanregung nicht, wie der Verfasser an einem Eisenrundstab feststellen konnte.

Die elektromechanische Übertragung der Schwingungen erfolgt bei den hier zu beschreibenden Messungen durch Spulen, die als Kern einen Permanentmagneten haben. An den Probenenden befin-

den sich ferromagnetische Übertragungskörper, die für die Schwingung wie träge Zusatzmassen wirken. Sie bedingen eine mathematisch erfaßbare Änderung der Randbedingungen. Die Berechnungen werden dadurch erheblich komplizierter, doch konnten sie vom Verfasser auch im Rahmen der erweiterten Biegeschwingungstheorie exakt durchgeführt werden. -

Durchfließt ein sinusförmiger Wechselstrom die Anregungsspulen, so wird deren Magnetfeld mit gleicher Frequenz sinusförmig geschwächt und verstärkt. Dadurch variiert die Kraft, die auf das gegenüber der Spule befindliche Stabende mit ferromagnetischer Zusatzmasse wirkt, periodisch, so daß der Stab erzwungene Schwingungen ausführt. Nach dem gleichen Prinzip wird am anderen Stabende von der Amplitude der mechanischen Schwingung eine elektrische Spannung induziert. -



Um die Inhomogenitäten der Magnetfelder, und damit der Kräfte, weitgehend auszugleichen, wurden die Magnetspulen an beiden Stabenden in Schwingungsrichtung paarweise über und unter der Probe angeordnet. Sie sind so geschaltet, daß das Magnetfeld einer Spule jeweils zunimmt, während das andere geschwächt wird.

Die relative Amplitude des schwingenden Stabendes kann durch Verstärkung der induzierten Spannung sehr empfindlich gemessen werden, so daß geringe Schwingungsamplituden für die Messungen ausreichen. Damit werden die von der Elastizitätstheorie geforderten kleinen Deformationen nie überschritten, und es erfolgt keine meßbare Wärmeentwicklung durch Reibungseffekte.

6. Probestäbe, Zusatzmassen

Sämtliche benutzten Probestäbe haben annähernd kreisförmigen Querschnitt. Dafür lassen sich die Schubspannungskomponenten im gebogenen Stab explizit ausrechnen; auch alle übrigen Berechnungen werden auf diesen Fall beschränkt.

Die ferromagnetischen Zusatzmassen haben dementsprechend die Gestalt dünner Ringe, die so an den Stabenden angebracht werden, daß ihr Schwerpunkt im Mittelpunkt des Stabendquerschnittes liegt. Die Masse eines Ringes wird als "halbe Zusatzmasse" $P_z/2$ definiert; das Verhältnis von Stabmasse plus Zusatzmasse (beide Ringmassen) zur Stabmasse P_o ergibt die Größe "Relativmasse": $P_R = \frac{P_o + P_z}{P_o}$. Die Ringe passen genau auf die Stäbe; zusätzlich werden sie mit einer geringen Menge von aushärtendem Zweikomponenten-Kleber (Araldit) befestigt. Die Masse des Klebers ist in der Zusatzmasse P_z enthalten, ihr Anteil liegt bei oder unter 5 %. -

Die Aufspaltung aller Resonanzfrequenzen in Dubletts zeigte an, daß die Stäbe nicht genau kreisförmigen sondern schwach elliptischen Querschnitt hatten. Deswegen wurde die Lage der Hauptträgheitsachsen markiert, und beide Frequenzen der Dubletts wurden voneinander unabhängig gemessen. Dies machte bei keinem Stab Schwierigkeiten. -
Der Vorschlag einiger Autoren[5, 9, 34], durch Anfeilen der Stäbe dafür zu sorgen, daß die Dublettfrequenzen genügend weit auseinanderfallen, und dann nur auf eine (etwa die höhere) abzustimmen, erscheint bedenklich. -

Die Stäbe wurden (bei Korrektur des Luftauftriebes) auf 10^{-4}g genau gewogen. Die Längenmessung mit der Schublehre hatte eine Unsicherheit von 10^{-2} cm, die Dickenmessung mit der Mikrometerschraube von 10^{-3} cm; beide Achsen des elliptischen Querschnittes wurden gemessen.

Zuerst wurde der Einfluß verschieden großer Zusatzmassen an einem Aluminiumstab (Reinheitsgrad 99 %) untersucht. Seine Daten waren bei $T = 24\ ^{o}C$:

Stab Nr.	l[cm]	$\bar{r}$[cm]	P_o[g]	P_R	ϱ[g/cm^3]
ALU II	25.07	0.752	120.433	1.012...1.124	2.7040

Als Zusatzmassen zur Schwingungsübertragung dienten Eisenringe mit Wandstärken von 0.05, 0.10 und 0.15 cm und verschiedener Länge, so daß die Masse beider Ringe zusammen zwischen 1.2 und 12.4 % der Stabmasse schwankte. -

Als Polymerproben wurden Stäbe aus technisch hergestelltem Polymethylmethacrylat PMMA (Plexiglas) ausgewählt. Die Stabdurchmesser lagen bei 0.2, 0.6 und 1.4 cm; von jedem Durchmesser wurden wenigstens drei verschieden lange Stäbe benutzt. Die dafür erforderlichen Eisenringe waren ungefähr 0.020 bis 0.025 cm dick und in ihrer Länge so bemessen, daß die Zusatzmasse zwischen 2.5 und 6.5 % der Stabmasse P_o lag, nur beim leichtesten Stab machte sie 9.5 % aus. -

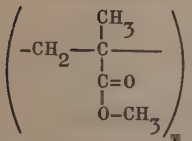
Zur Beseitigung innerer Spannungen wurden alle PMMA-Stäbe wenigstens 5 ^{o}C über der höchsten Meßtemperatur einige Stunden lang getempert, wobei sich in einigen Fällen Länge, Querschnitt und Masse geringfügig änderten; während der Messungen traten weitere Änderungen der Stabdimensionen nicht auf. -

Durch Absorption - offenbar von Methanoldampf, den PMMA in beträchtlichem Maße aufnimmt[57], aus einem im gleichen Raum befindlichen Thermostaten - schwankte das Gewicht der Stäbe um maximal 2 ‰; besonders nach längerer Aufbewahrung im Exsikkator oder längeren Messungen oberhalb von 100° C war ein allmählicher Wiederanstieg des Gewichts zu verfolgen. Daher wird mit einer mittleren Masse während der Messungen gerechnet. -

Tabelle der PMMA-Stäbe; Bezugstemperatur (22 ± 2)°C :

Stab Nr.	l [cm]	$\bar{r}$ [cm]	P_0 [g]	P_R	ϱ [g/cm³]
PMMA 11	27.07	0.7082	50.5198	1.025 24	1.184 43
PMMA 12	16.22	0.7082	30.3114	1.025 63	1.186 02
PMMA 13	11.60	0.7082	21.6932	1.025 12	1.186 87
PMMA 14	7.02	0.7082	13.1291	1.027 69	1.186 97
PMMA 15	6.53	0.7090	12.2156	1.035 86	1.184 57
PMMA 16	7.16	0.3035	2.4510	1.063 24	1.182 94
PMMA 17	11.65	0.3035	3.9908	1.052 52	1.183 77
PMMA 18	16.36	0.3035	5.6083	1.043 72	1.184 63
PMMA 19	17.90	0.1000	0.6700	1.035 82	1.191 44
PMMA 20	22.99	0.1003	0.8610	1.055 75	1.184 98
PMMA 21	17.72	0.1010	0.6720	1.035 71	1.183 34
PMMA 22	11.62	0.1001	0.4355	1.065 44	1.190 60
PMMA 23	6.75	0.1001	0.2530	1.094 86	1.190 69

7. Physikalisch-chemische Daten des Polymeren



Polymethylmethacrylat ist eine amorphes lineares Polymeres, dessen Kettenglieder die angegebene chemische Zusammensetzung haben. - Zur Molekulargewichtsbestimmung wurde die Substanz in Aceton gelöst; aus der Viskosität von Lösungen verschiedener Konzentration bei 20° C folgt durch Extrapolation nach[44] ein mittleres Molekulargewicht von:

$$\bar{M} = 2.4 \cdot 10^6 \text{ g/Mol} .$$

Das Molekulargewicht der monomeren Einheit $C_5H_8O_2$ beträgt 100.12 g/Mol, so daß der Polymerisationsgrad p im Mittel bei 24 000 liegt. -

Da sich die Dimensionen der Probestäbe bei Temperaturvariation entsprechend ihrem Ausdehnungskoeffizienten ändern, wurde ein spezieller Probezylinder von 1.44 g PMMA aus dem Stabmaterial zur Bestimmung der Dichte bei verschiedenen Temperaturen herausgeschnitten.

Die Dichtemessung erfolgte mittels eines Dilatometers, dessen Kapillare mit Quecksilber kalibriert wurde, um eine hohe Genauigkeit zu erreichen. Danach hat PMMA mit einem Molekulargewicht von $2.4 \cdot 10^6$ g/Mol bei 22° C eine Dichte $\varrho = 1.186\ \underline{4}$ g/cm^3. Um diesen Wert streuen auch die aus den geometrischen Abmessungen der einzelnen Stäbe errechneten Dichten nur wenig; abgesehen von den besonders ungünstig dimensionierten Stäben PMMA 16, 19, 22, 23 liegt die Abweichung unter 2 ‰. - Für den Probekörper selbst wurde geometrisch ermittelt: $\varrho(22^\circ) = (1.182\ 4 \pm 0.004\ 5)$g/cm^3; danach liegt der dilatometrische Wert im Streubereich. -

Die dilatometrisch gemessenen Dichten im Bereich von -37° bis +144° C gibt die graphische Darstellung (G 1) an. Da bei der Einstellung jeder neuen Temperatur oberhalb +20° bis zur Einstellung des Gleichgewichts (ggf. mehrere Tage) gewartet wurde, ist die Streuung der einzelnen nach Erwärmung oder Abkühlung gemessenen Punkte minimal (unter 0.2 ‰). -

Die sehr schwach gekrümmte Kurve der Dichten weist bei $+60^{\circ}$ einen schwachen und bei 99° C einen stärkeren Knick auf; der letztere entspricht einer statisch gemessenen Glastemperatur $T_G = 99^{\circ}$. Nach dem Zustandsdiagramm[74] sollte T_G für PMMA dieses Molekulargewichts etwa bei 100° C liegen. -

Für 20° C entnimmt man der Darstellung (G 1) eine Dichte $\varrho(20^{\circ}) = 1.186\ \underline{2}$ g/cm^3 von PMMA mit $\overline{M} = 2.4 \cdot 10^6$ g/Mol. BECKER [1] gibt einen dilatometrisch gemessenen Wert von $\varrho(20^{\circ}) = 1.188$ g/cm^3 für PMMA mit $\overline{M} = .6 \cdot 10^6$ g/Mol an. Davon weicht der obere Wert nur um 1 ‰ nach unten ab, d.h. entgegengesetzt der Richtung, die man für eine Probe niedrigeren Polymerisationsgrades erwartet. -

Der lineare Ausdehnungskoeffizient α errechnet sich aus den gemessenen Dichten; er wird mit den durch Längenausdehnung direkt erhaltenen Werten von BECKER [1] verglichen:

im Bereich	α [Grad^{-1}]	nach[1] (für höheres PMMA)
20°... 60°	$0.74\ 10^{-4}$	$0.91\ 10^{-4}$
60°... 90°	$0.89\ 10^{-4}$	$1.17\ 10^{-4}$
105°...140°	$1.92\ 10^{-4}$	$1.72\ 10^{-4}$

BECKER[1] benutzt ein PMMA mit größerer Kettenlänge und gibt als Genauigkeit für α aus dem Vergleich mit seiner dilatometrischen Messung $\pm$ 2 % an. - Die Übereinstimmung mit den hier gemessenen Werten ist erträglich; besser ist sie mit Daten von Fox und Flory, die BECKER zitiert. -

Bezugstemperatur aller in der vorliegenden Arbeit beschriebenen geometrischen Messungen ist 22° C mit der Dichte $\varrho(22^{\circ}) = 1.186\ \underline{4}$ g/cm^3. Demnach müssen alle bei anderen Temperaturen gemessenen E-Moduln zur Berücksichtigung der Län-

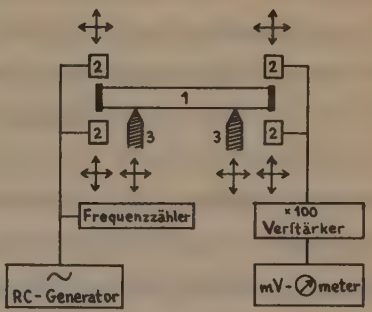
genänderung der Probenabmessungen um den Faktor $(1 + \alpha \cdot \Delta T)^{-1}$ korrigiert werden[1, 6]. Da diese Korrektur jedoch bei $+115^{o}$ erst etwa 1 % beträgt (und damit innerhalb der Meßgenauigkeit bleibt), werden die Werte E(T) wie vielfach auch in der Literatur[2, 10, 69] nicht umgerechnet. Dafür wird eine graphische Darstellung (G 2) der für die einzelnen Temperaturen erforderlichen Korrekturfaktoren $(1 + \alpha \cdot \Delta T)^{-1}$ angegeben. -

8. Meßapparatur, mechanischer Teil

Blockbild der Apparatur:

1 Probestab mit Eisenringen
2 Magnetspulen
3 Stablagerungen

Die Verschiebbarkeit der Magnetspulen und Stablagerungen ist durch Pfeile angedeutet.



In einem Gestell von 10 cm Durchmesser und 32 cm Länge befinden sich auf metallischer Unterlage die früher besprochenen "gekrümmten Schneiden" aus Silikonkautschuk, auf denen die Probestäbe in ihren Schwingungsknoten frei aufliegend gelagert werden. Die Lagerungen sind horizontal und vertikal verschiebbar; sie werden in der jeweils gewünschten Position festgeschraubt. -

Die Magnetspulen oberhalb und unterhalb der Probestäbe werden von je einer Klammer gehalten, die mit Silikonkautschuk ausgelegt ist; die Klammern selbst befinden sich in einer vertikalen, ebenfalls mit Silikonkautschuk belegten, feststell-

baren Gleitvorrichtung. Dadurch wird eine direkte Übertragung von äußeren Schwingungen und denen der Geberspulen auf Lagerung oder Empfängerspulen verhindert. Alle Spulen lassen sich in den Gleitvorrichtungen einzeln vertikal, die Gleitvorrichtungen mit den Spulenpaaren horizontal verschieben und in jeder Lage fixieren. -
So kann die Probenlänge - wegen des Durchmessers der Magnetspulen begrenzt - zwischen etwa 6 und 28 cm liegen, ihr Durchmesser maximal bei 2 cm. -

Erst der Einsatz von Silikonkautschuk zur mehrfachen Dämpfung innerhalb des Probengestells ermöglichte einwandfreie Messungen der geringen Schwingungsamplituden oberhalb 5000 Hz, weil sich Kontaktresonanzen im Probengestell vorher nicht völlig vermeiden ließen. Untersuchungen bei geringen Resonanzamplituden waren aber nicht nur unumgänglich, um mit kleinen reversiblen Deformationen zu arbeiten, sondern sie ergaben sich zwingend auch aus anderen Gründen, die später (s.S. 27, 28) erörtert werden. - Von Schwierigkeiten mit Parasitärresonanzen berichtet z.B. auch ZELENEV[77], der deshalb nur die Grundschwingung der Stäbe benutzt. -

9. Meßapparatur, elektrischer Teil

Ein RC-Generator erzeugt sinusförmige elektrische Schwingungen im Frequenzbereich von 20 bis 17 000 Hz. Damit wird ein Spulenpaar mit Permanentmagnet-Kernen gespeist. Gleichzeitig wird die Generatorfrequenz in einem elektronischen Zähler auf 0.1 oder 1 Hz genau ausgezählt und angezeigt. Die Benutzung eines Frequenzzählers[6, 66] ist bequemer und ermöglicht eine höhere

Genauigkeit[33)] als die Frequenzeichung auf einem Oszillographen mit Lissajous-Figuren[49)]. -

In einem dem Geber-Spulenpaar völlig gleichen Empfängerpaar wird proportional der Schwingungsamplitude des Stabes eine Spannung induziert. Diese Spulen sind wie die Geber parallel geschaltet, um Schwierigkeiten mit der Abschirmung und daraus resultierendes Rauschen bei höheren Frequenzen zu vermeiden. Da die induzierten Spannungen vom Abstand Spule - Eisenring (des Stabes) abhängig sind, muß die Höhenlage des Probestabes oder der Spulen justiert werden, damit nicht bei verschiedener Entfernung des Stabendes von beiden Spulen zwei unterschiedliche Spannungen parallel liegen. -

Nach hundertfacher Verstärkung wird die von der Stabamplitude induzierte Spannung mit einem Röhren-Millivoltmeter gemessen. Ein Zeigerinstrument mit genügender Skalenlänge eignet sich dafür wesentlich besser als etwa ein Oszillograph[6)]. -

Bei Variation der Generatorfrequenz zeigen Spannungsmaxima die Stabresonanzen der einzelnen Schwingungsordnungen an; aus dem Amplitudenverlauf in der Umgebung der Maxima kann man die Stabdämpfung berechnen. -

10. Meßapparatur, thermischer Teil

Zur Temperierung der Probestäbe dient ein elektrischer Heizofen, dessen Innendurchmesser wenig größer als der Durchmesser des Probengestells ist. Dieses wird im Ofen zur Vermeidung von Kontaktresonanzen auf Silikonkautschukstreifen gelagert. Der

Ofen selbst befindet sich auf einer dämpfenden Unterlage, um die Übertragung von Gebäudeschwingungen zu unterbinden. -

Die Wärmeisolation ist so gut, daß nach Abkühlung des Innenraumes auch Messungen bis etwa -40° C ausgeführt werden können. Die obere Temperaturgrenze setzt der für die Wicklung der Spulen benutzte Lackdraht, der Temperaturen bis $+155^{\circ}$ C aushält. Bei Verwendung von anders isoliertem Draht könnte diese Grenze erhöht werden[1, 4, 32], doch würden etwa Spulen mit glasisolierter Wicklung[32] größer ausfallen und daher Messungen an extrem kurzen Proben nicht mehr erlauben. -

Da die Heizwicklung nicht bifilar ausgeführt ist, muß der Ofen zur Vermeidung von Störungen mit Gleichstrom geheizt werden[1, 78]. Der Heizstrom wird über eine Brücke mit Thermistor, der sich direkt über der Heizwicklung befindet, geschaltet. Die einzelnen Heizintervalle führen wegen der großen Wärmekapazität des Ofens und wegen der thermostatisierenden Wirkung des Luftraumes in seinem Inneren nicht zu merkbaren Temperaturschwankungen.

Die Temperaturmessung erfolgt mit Thermoelementen[1, 56, 78]; vier sind längs der Probe im Gestell befestigt. Auf Anbringen einer Blindprobe, in der sich ein Thermoelement befindet[33], wurde verzichtet. Die Temperaturkonstanz längs der Probe ist gut, weil der Ofen wesentlich länger als das Probengestell ist (Innenlänge 45 cm gegenüber Gestellänge 32 cm) und große Metallquerschnitte für gute Wärmeleitung in Längsrichtung sorgen. Außerdem liegt die Heizwicklung an den Enden des Ofens enger als in der Mitte. -

Temperaturen werden auf 0.1° C genau gemessen; sie können zwischen den einzelnen Meßstellen oberhalb von 100° längs kurzer Stäbe um etwa 0.2°, bei den längsten um etwa $\pm 0.4^{\circ}$ differieren (vgl.[56] mit $\pm 0.3^{\circ}$). Die Daten der vier Thermoelemente werden gemittelt. -

Wegen der Größe des Ofens und der schlechten Wärmeübertragung durch die Luft in seinem Innenraum dauert es ca. zwei Stunden, bis sich bei einer gewünschten Temperaturerhöhung um 10° Gleichgewicht einstellt; vgl. dazu Darstellung (G 4).

11. Anregungs- und Resonanzamplitude, Grenze der Methode

Für Messungen bei hohen Frequenzen und höheren Oberschwingungen sind große Amplituden der elektrischen Anregung erforderlich, um überhaupt noch Resonanzsignale zu bekommen; dagegen muß bei niedrigen Frequenzen die Anregung möglichst gering gehalten werden. Folgende Punkte sind zu beachten:
Erstens verringern sich die Amplituden der Oberschwingungen mit zunehmender Schwingungsordnung[15]. Auch die Amplituden von kurzen, dicken Stäben sind bei gleicher Anregung kleiner als die von langen, dünnen.
Zweitens muß für Messungen an Polymeren bei höherer Temperatur der Abstand Magnetspule - Stabende genügend groß gewählt werden, damit sich der allmählich erweichende Stab nicht biegt und an den Magnetspulen "festklebt". Die Vergrößerung aller Spulenabstände aber schwächt das Resonanzsignal doppelt: die erzwungene Schwingungsamplitude des Stabes vermindert sich, und die vom Stabende in den weiter entfernten Spulen induzierte Spannung ist kleiner.

Drittens steigt die Dämpfung bei Polymeren mit der Temperatur so stark an, daß man oberhalb der Glastemperatur nur geringe Resonanzamplituden hat, die sich oft nur noch schwach vom Rauschuntergrung abzeichnen, so daß Dämpfungsmessungen aus Halbwertsbreiten-Bestimmungen unmöglich werden. Die Resonanzen gehen schließlich selbst allmählich im Rauschen unter[69]. Viertens nimmt der Wechselstromwiderstand der Magnetspulen wegen ihrer Selbstinduktion mit der Frequenz zu, so daß die erzwungene Schwingungsamplitude bei gleicher Generatorspannung mit höherer Frequenz abnimmt.
Schließlich wächst noch der ohmsche Widerstand des Spulendrahtes etwas mit der Temperatur. -

Dagegen muß bei sehr niedrigen Frequenzen (unter 500 Hz) die Generatorspannung abgeschwächt werden, weil sonst so große Ströme in den Anregungsspulen fließen, daß eine merkbare Erwärmung eintritt. Diese lokale Temperaturerhöhung zeigt das nahe dem Stabanfang befindliche Thermoelement an. -
Außerdem fallen bei großer Schwingungsamplitude Luftreibung und Schallabstrahlung als zusätzliche Dämpfungsanteile ins Gewicht, die die Dämpfungsmessungen verfälschen[35]. Auf die Resonanzfrequenz wirken sie sich allerdings kaum aus: Darstellung (G 5). Die Resonanzamplitude nimmt praktisch linear mit der Anregungsamplitude zu. -

Ihre Grenze hat die Methode der Biegeschwingungsresonanz bei Temperaturen, wo die innere Dämpfung des Probenmaterials so groß wird, daß sich keine stehenden Wellen (Resonanz) mehr bilden. Außerdem dürfen Fließerscheinungen beim Probestab nicht dazu führen, daß er sich durchbiegt und mit seinen Ei-

senringen an den Magneten der Spulen festklebt. Lange, dünne Stäbe erleiden dieses Schicksal schon bei erheblich niedrigeren Temperaturen als kurze, dicke; im allgemeinen bei der Glastemperatur oder in ihrer Umgebung. Die weitaus meisten E-Modul-Messungen, die sich in der Literatur finden, reichen nur bis in dieses Temperaturgebiet, z.B. moderne Messungen bei[2, 24]. - Dagegen kann der Torsionsmodul auch bei sehr weichem Material noch gemessen werden, allerdings dann nur bei tiefen Frequenzen unter 1 Hz. -

Als Ausweg schlagen einige Autoren vor, die zu untersuchende Substanz gut haftend auf eine harte, elastische Unterlage zu bringen, zweckmäßig Eisenblech. Damit sind Untersuchungen bis weit ins Erweichungsgebiet hinein möglich, obwohl die direkten Messungen am gleichen Stoff ohne Unterlage nur bis etwa T_G reichen[31, 69]. Theorie und Messungen solcher zusammengesetzter Systeme (zuerst OBERST[49] mit "lamellierten Blechen") beschreiben[31, 53, 69]. -

Derartige Messungen weisen aber einige Ungenauigkeiten auf: Bei den Berechnungen wird die Kleber-Zwischenschicht nicht berücksichtigt. Ferner muß die Polymerschicht wesentlich dicker sein als das Eisenblech, damit überhaupt ein Effekt zu messen ist. Sie darf aber theoretisch trotz der Abweichung ihres Ausdehnungskoeffizienten bei Erwärmung nicht über den Rand des Bleches quellen oder eine gewölbte Oberfläche bilden. Außerdem treten Abweichungen auf, sobald die Proben nicht mehr die Bedingung "lang und dünn" erfüllen, die für die Anwendung der elementaren Biegeschwingungstheorie Voraussetzung ist. -

Nicht zu unterschätzen ist allerdings der Vorteil der harten Unterlage, daß - wenn auch mit geringerer Genauigkeit - noch bei höheren Temperaturen als mit formbeständigen Stäben Messungen möglich sind. -

Dagegen ist es dem Verfasser mit Hilfe der erweiterten Theorie der Biegeschwingungen gelungen, den Frequenzbereich und besonders den Temperaturbereich direkter Messungen durch Benutzung kurzer, dicker Stäbe erheblich nach ober zu erweitern. -

Die obere Frequenzgrenze für Biegeschwingungs-Resonanzmessungen an Polymeren liegt bisher bei 5000 - 10 000 Hz[22, 33, 38]; sie konnte hier auf wenigstens 17 000 Hz (höchste mit dem verwendeten RC-Generator erreichbare Frequenz) erhöht werden.

Ferner kann mit kurzen, dicken Stäben die Glastemperatur weit überschritten werden. Die sehr kurze, dicke Probe PMMA 14 konnte zum Beispiel ohne Gestaltänderung so sehr erhitzt werden (ca. 145° C), daß die weiche Silikonkautschuklagerung nach Abkühlung Druckstellen - verursacht durch ihr Eigengewicht - in der Probe hinterließ. Bei dieser Temperatur bildete sich keine Resonanz mehr aus. Die höchste erreichte Meßtemperatur betrug 140° C mit dem Stab PMMA 15. -

Messungen an Polymeren auf harter Unterlage wurden nicht ausgeführt, weil die Berechnungen nach der vom Verfasser anschließend dargestellten erweiterten Theorie für zusammengesetzte Systeme wie "lamellierte Stäbe" zu unübersichtlich und womöglich undurchführbar sind. -

12. Durchführung der Messungen

Die Experimentiertechnik mit der angegebenen Apparatur soll durch Beschreibung von Vorbereitung und Durchführung der Messungen erläutert werden. -

Zuerst werden Anregungs- und Empfangsspulen den Abmessungen des Probestabes entsprechend eingestellt, wobei man auch die Abstände aller Spulen von den Stabenden sorgfältig einreguliert. Soll eine Polymerprobe stark erwärmt werden, so muß der Abstand mindestens 2 bis 3 mm betragen. -
Dann werden die Lagerungen so angeordnet, daß der Probestab in den Schwingungsknoten aufliegt. Die Abstände der Knoten vom Stabanfang ergeben sich je nach Schwingungsordnung und Zusatzmasse aus Darstellung (G 6). -
Bei höheren Schwingungsordnungen stehen mitunter mehrere Knotenpaare zur Auswahl; es hat sich gezeigt, daß die in verschiedenen Paaren gemessenen Resonanzfrequenzen innerhalb der Meßgenauigkeit gleich sind (G 7, 8). -
Der Einfluß einer aus den Knoten verschobenen Lagerung auf die Resonanzfrequenz ist bei langen, dünnen Stäben und niedrigen Schwingungsordnungen erheblich; er nimmt mit Verkürzung der Probe und mit Erhöhung der Ordnungszahl, schwächer mit wachsender Stabdicke ab (G 7, 8). -

Die relative Abweichung der Resonanzfrequenz bei falscher Lagerung ist praktisch temperaturunabhängig: Darst. (G 9). Daher kann man sie bei Zimmertemperatur durch Verschiebung der Lagerungen bestimmen, dann aber bei höherer Temperatur mehrere Schwingungsordnugen in der gleichen Knotenlage

messen. Zweckmäßig wählt man die für die Grundschwingung richtige Stellung und zieht für Oberschwingungen die ermittelten Korrekturbeträge ab. -
Die Dämpfung ändert sich bei richtig gewählter Anregungsamplitude durch diese Lagerungsverschiebung nicht merkbar, vgl.[35].

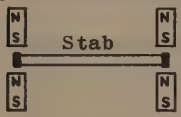
Im Heizofen dauert die Einstellung eines thermischen Gleichgewichts ca. 2 Stunden, doch wurden die der Arbeit zugrunde gelegten Messungen bei variabler Temperatur jeweils frühestens 3 Stunden nach der Temperaturwahl im Brückenstromkreis ausgeführt, vgl. (G 4). - Eine Ausgleichszeit von 2 Stunden empfiehlt z.B. auch HEYDEMANN[23]. Bei sehr dünnen Stäben genügen geringere Anpassungszeiten; ob es allerdings ausreicht, die Probe vor der Messung nur 10 bis 20 Minuten auf dem Temperaturniveau zu halten[24, 77], bleibe dahingestellt. -
Deshalb wurde die Methode der einheitlichen Lagerung für mehrere Schwingungsordnungen bei den meisten Stäben benutzt, um die langen Wartezeiten bis zur Einstellung des Temperaturgleichgewichts nicht für jede einzelne Schwingungsordnung zu wiederholen. -

Die Resonanzfrequenz wird nach Wahl einer geeigneten Anregungsspannung durch Variation der Generatorfrequenz aufgesucht. Jede Resonanz wird entsprechend den beiden Hauptträgheitsachsen des elliptischen Stabquerschnitts in den beiden zueinander senkrechten Schwingungsrichtungen - oder sogar in vier Richtungen nach Drehung um je 90° - mehrmals gemessen. Für jede einzelne Winkellage wird ein Mittelwert gebildet. Diese Mittel gehen in die Berechnung des Quadrats der Resonanzfrequenz für elliptische Stabquerschnitte wie folgt ein:

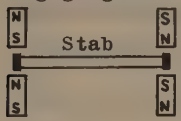
$\overline{\nu^2} = \overline{\nu_I} \cdot \overline{\nu_{II}}$ vgl.(18) oder: $\overline{\nu^2} = \frac{\overline{\nu_1} + \overline{\nu_3}}{2} \cdot \frac{\overline{\nu_2} + \overline{\nu_4}}{2}$.

Während man stark ausgebildete Resonanzen auf dem Millivoltmeter immer als deutliche Maxima erkennt, können sich bei empfindlichster Stellung des Instruments schwache Signale auch als Minima des vom Rauschen herrührenden, fast frequenzunabhängigen Zeigerausschlages abzeichnen. Je nach Stellung der Magnetspulen mißt man - bei gleicher Orientierung der Magnete an beiden Stabenden die höchsten ungeradzahligen Resonanzen als Maxima und die geradzahligen als Minima - bei entgegengesetzter Orientierung umgekehrt. - Dieser Effekt ist dadurch zu erklären, daß die beiden Stabenden bei ungeradzahliger Schwingungsordnung entgegengesetzt, bei gerader gleichsinnig schwingen. -

gleich orientiert:



entgegengesetzt:



Bei einigen anfänglichen Messungen war dieser Umstand noch nicht erkannt und deshalb auf die Frequenz abgestimmt worden, bei der die Resonanzamplitude oberhalb des Minimums in das konstante Rauschen mündet ("scheinbares Maximum"). Daher liegen die - so im allgemeinen nur für die höchste oder zweithöchste Schwingungsordnung gemessenen - E-Moduln zu hoch, und die relative Abweichung steigt wegen der Dämpfungszunahme mit der Temperatur an. Durch Vergleich mit den als Minima gemessenen Werten kann der Fehler abgeschätzt und korrigiert werden. -

Die Flanken der Resonanzkurven verschiedener Schwingungsordnungen überlagern sich - besonders bei starker Dämpfung.

Dies zeigt Darstellung (G 10) am Beispiel einer vollständigen unverzerrten Resonanzkurve des Stabes PMMA 11, aufgenommen für die ersten fünf Schwingungsordnungen bei 25.4°C. Außerdem ist erkennbar, daß die Amplitude der erzwungenen Schwingungen mit abnehmender Frequenz auch außerhalb der Resonanzbereiche ansteigt; unterhalb von etwa 1000 Hz wird sie merkbar, unter 150 Hz erheblich. -
Bei der Berechnung des Dämpfungsfaktors d aus der Halbwertsbreite der Resonanzkurven dürfen diese Einflüsse nicht vernachlässigt werden. Deshalb wurden verschiedene Auswertungs-Verfahren probiert.

Zunächst wurde bei den Stäben PMMA 11 und 12 die gesamte Resonanzkurve für verschiedene Temperaturen mit kleinen Frequenzschritten aufgenommen. Daraus wurden dann durch graphische Subtraktion der Überlagerungen und des Untergrundes die einzelnen Resonanzkurven der verschiedenen Schwingungsordnungen gewonnen. Die Punkte auf den Flanken der so erzeugten Kurven, bei denen die Amplitude A den Betrag $A_{max}/\sqrt{2}$ hat, begrenzen die Halbwertsbreite. -

Derartige graphische Auswertungsverfahren sind für die Praxis zu umständlich. - Ein anderes Verfahren schlägt für die sich überlagernden Resonanzkurven OBERST[49)] vor, doch konnten damit hier keine guten Ergebnisse erzielt werden. -

Dagegen erwies es sich als praktisch, auf beiden Seiten der Resonanzstelle die Amplitudendifferenz zum nächsten Minimum (zwischen den beiden benachbarten Maxima) zu messen. Die beiden so ermittelten, im allgemeinen verschieden großen

Werte werden als Amplituden A_{max} behandelt. Dann ergeben sich die Halbwertsstellen dort, wo die Amplitudendifferenz zum nächsten Minimum $A_{max}/\sqrt{2}$ beträgt. Darstellung (G 11) zeigt eine Dämpfungsmessung für die Grundschwingung des Stabes PMMA 12 bei 108.8° C. -
Die auf diese Weise erhaltenen Dämpfungsfaktoren d stimmen mit den aus den graphisch erzeugten Einzelkurven errechneten überein. -

Zum Aufsuchen der Schwingungsknoten und zur Berechnung des Elastizitätsmoduls E aus der gemessenen Resonanzfrequenz sowie des Dämpfungsfaktors d aus der Halbwertsbreite der Schwingung werden die Ergebnisse theoretischer Betrachtungen über die Biegeschwingung von Stäben benötigt, die anschließend dargelegt werden sollen. -

II. Elementare Theorie der Biegeschwingung

In den folgenden Abschnitten soll schrittweise eine exakte Theorie der Biegeschwingungen stabförmiger Proben entwickelt werden, die zwischen den Resonanzfrequenzen der verschiedenen Schwingungsordnungen und zwei elastischen Konstanten des isotropen Probenmaterials bei Kenntnis der Stabdaten Länge, Querschnitt, Masse oder Dichte und Zusatzmasse (zur elektromagnetischen Übertragung) einen Zusammenhang vermittelt.

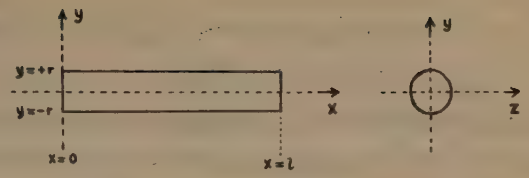
Zum Verständnis vieler Schritte bei der Verfeinerung der theoretischen Betrachtungen und im Interesse einer zusammenhängenden Darstellung mit einheitlicher Nomenklatur wird zunächst die elementare Theorie, die sich in Lehr- und Handbüchern der Physik, z.B.[8, 76] findet, zusammenfassend wiedergegeben.

1. Differentialgleichung

Die elementare Theorie setzt voraus, daß bei der Biegung des Stabes alle Querschnitte eben und senkrecht zur Stabachse bleiben. Dies bedeutet die Vernachlässigung des Einflusses der Schubspannungen. -

Alle folgenden Betrachtungen werden für einen zylindrischen Stab mit der Länge l und dem Radius r durchgeführt. Die Stabachse fällt mit der positiven x-Achse des Koordinatensystems zusammen, dessen Ursprung im Mittelpunkt der einen Stabendfläche liegt. Der Stab schwingt in y-Richtung, jedoch nicht seitlich in z-Richtung.

Lage des Koordinatensystems:



Bei der Biegung eines Stabelements dx werden die zur Achse parallelen Fasern proportional ihrem Abstand von der neutralen Fläche verlängert oder verkürzt. Dadurch entstehen positive und negative Normalspannungen σ, die mit den relativen Dehnungen ε nach dem Hooke'schen Gesetz zusammenhängen[63]:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{\Delta l}{l} = E \cdot \frac{\Delta dx}{dx} \qquad (1)$$

Die Verlängerung Δdx einer Faser kann durch den Krümmungsradius r_{Kr} ausgedrückt werden nach der Proportionalität:

$$\frac{r_{Kr}}{dx} = \frac{y}{\Delta dx} \quad \text{und damit} \quad \varepsilon = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{y}{r_{Kr}} \qquad (2)$$

Die Summe aller Zugspannungen über den Querschnitt f ist wegen der Linearität der Verlängerungen Δdx mit dem Achsenabstand y gleich der aller Druckspannungen; sie bilden aber Kräftepaare mit dem Moment D:

$$D = [r, K] \longrightarrow \int_{-r}^{+r} y\, dK = \int_{-r}^{+r} y \cdot \sigma\, df = \int_{-r}^{+r} y \cdot E\varepsilon\, df = \frac{E}{r_{Kr}} \cdot \int_{-r}^{+r} y^2\, df \qquad (3)$$

Der Krümmungsradius r_{Kr} ist nach der Differentialgeometrie:

$$r_{Kr} \approx -\frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \quad \text{oder} \quad r_{Kr} \approx -\frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}} \qquad (4)$$

Mit dem Flächenträgheitsmoment Θ bekommt man dann:

$$\Theta = \int_{-r}^{+r} y^2\, df \qquad (5)$$

$$D = -E\Theta \frac{d^2y}{dx^2} \qquad (6)$$

Das Biegemoment D ist von der Krümmung abhängig, die sich in Richtung der Stablänge ändert. Die Differenz der an den Enden eines Stabelements dx angreifenden Momente entspricht einer Scherkraft Q (Querkraft senkrecht zur Stabachse) mit

dem Kraftarm dx:

$$dD = D(x+dx) - D(x) = D(x) + \frac{\partial D}{\partial x}\,dx - D(x) = Q\,dx$$

$$\frac{dD}{dx} = Q = -E\Theta\frac{d^3y}{dx^3} \qquad (7)$$

Auch die Scherkraft Q ist ortsabhängig. So bleibt am Stabelement dx mit der Masse dm eine Scherkraftdifferenz dQ übrig, die eine Beschleunigung senkrecht zur Achsenrichtung hervorruft:

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx = dm \cdot b = \varrho f dx \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad (8)$$

Damit erhält man die einfachste Differentialgleichung der Biegeschwingung:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \varrho f \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -E\Theta \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{E\Theta}{\varrho f}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0} \qquad (9)$$

Diese Gleichung berücksichtigt weder den Einfluß der Scherspannungen im gebogenen Stab noch die rotatorische Trägheit der Stabelemente. Sie ist deshalb nur für lange, dünne Stäbe gültig. -

2. Elastizitätsmodul und Resonanzfrequenzen

Als Lösungsansatz wird für die Schwingungsamplitude y das Produkt einer reinen Orts- und einer reinen Zeitfunktion in die Differentialgleichung eingesetzt:

$$y(x,t) = \psi(x) \cdot v(t) \qquad (10)$$

$$\psi(x) \cdot \ddot{v}(t) + \frac{E\Theta}{\varrho f} \cdot \psi^{IV}(x) \cdot v(t) = 0$$

$$\frac{\ddot{v}(t)}{v(t)} + \frac{E\Theta}{\varrho f}\frac{\psi^{IV}(x)}{\psi(x)} = 0 \qquad (11)$$

Da die Variablen voneinander unabhängig sind, die Gleichung aber für alle x und t gilt, müssen beide Summanden konstant sein. Man setzt daher:

$$\frac{\ddot{v}(t)}{v(t)} = -\omega_n^2 = \text{konst} \qquad \text{(Eigenfrequenzen)} \qquad (12)$$

$$\frac{\psi^{IV}(x)}{\psi(x)} = k_n^4 = \text{konst} \qquad \text{(Eigenwerte)} \qquad (13)$$

Der Index n entspricht dabei der Schwingungsordnung; die Grundschwingung wird im folgenden mit n = 0, die Oberschwingungen mit n = 1, 2, ... bezeichnet.

Beim Einsetzen von (12, 13) in die Differentialgleichung (9) erhält man die charakteristische Gleichung:

$$-\omega_n^2 + \frac{E\Theta}{\varrho f} k_n^4 = 0 \quad \text{bezw.} \quad \frac{E\Theta}{\varrho f} k_n^4 = \omega_n^2 \qquad (14)$$

Die Eigenwerte k_n sind auf die Stablänge l bezogen, deshalb rechnet man besser mit längenunabhängigen Eigenwerten:

$$M_n = k_n \cdot l \quad \text{bezw.} \quad k_n = \frac{M_n}{l} \qquad (15)$$

Das Flächenträgheitsmoment beträgt bei kreisförmigem Querschnitt:

$$\Theta = \int_{-r}^{+r} y^2 \, df = 2 \cdot \int_0^{\pi} \int_0^r r^2 \cdot \sin^2\vartheta \cdot r \, d\vartheta \cdot dr = 2 \cdot \int_0^{\pi} \frac{r^4}{4} \cdot \sin^2\vartheta \, d\vartheta = 2 \cdot \frac{r^4}{4} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi r^4}{4}$$

$$\Theta = \frac{\pi r^4}{4} \qquad (16)$$

So bekommt man den Zusammenhang zwischen Elastizitätsmodul, Resonanzfrequenzen und Stabdimensionen:

$$E = \frac{\varrho f}{\Theta} \cdot \frac{\omega_n^2}{k_n^4} = \varrho \cdot \frac{\pi r^2}{\frac{\pi r^4}{4}} \cdot \frac{4\pi^2 \nu_n^2}{\frac{M_n^4}{l^4}} = \frac{16\pi^2}{M_n^4} \cdot \frac{l^4}{r^2} \cdot \varrho \cdot \nu_n^2$$

$$\boxed{E = \frac{16\pi^2}{M_n^4} \cdot \frac{l^4}{r^2} \cdot \varrho \cdot \nu_n^2} \qquad (17)$$

Bei Temperaturerhöhung dehnen sich Stäbe im allgemeinen aus, und ihre Dichte nimmt ab. Daher ist es zweckmäßig, die Dichte des Stabes durch seine Masse P und seine geometrischen Abmessungen auszudrücken: $E = \frac{16\pi^2}{M_n^4} \cdot \frac{l^4}{r^2} \cdot \frac{P}{\pi r^2 \cdot l} \cdot \nu_n^2$

$$\boxed{E = \frac{16\pi}{M_n^4} \cdot \frac{l^3}{r^4} \cdot P \cdot \nu_n^2} \qquad (18)$$

In dieser Form erkennt man, wie bei Temperaturänderung die Abweichungen von den ursprünglichen Stabdimensionen mit dem linearen Ausdehnungskoeffizienten α korrigiert werden müssen:

$$E(T) = \frac{16\pi}{M_n^4} \cdot \frac{l_0^3 (1+\alpha\Delta T)^3}{r_0^4 (1+\alpha\Delta T)^4} \cdot P \cdot \nu_n^2 = \frac{16\pi}{M_n^4} \cdot \frac{l_0^3}{r_0^4} \cdot P \cdot \nu_n^2 \cdot (1+\alpha\Delta T)^{-1} \qquad (19)$$

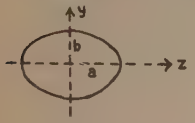
Der Korrekturfaktor $(1 + \alpha \cdot \Delta T)^{-1}$ folgte auch aus der Theorie der Entropieelastizität (Seite 6); er ist der Darstellung (G 2) für PMMA zu entnehmen. -
Die Formeln (17) und (18) gelten nur für lange, dünne Stäbe und niedrige Schwingungsordnungen. -

3. Resonanzdubletts elliptischer Stäbe

Die Aufspaltung der Resonanzfrequenzen elliptischer Stäbe in Dubletts erkennt man beim Auflösen der charakteristischen Gleichung (14) mit (15) nach den Frequenzen:

$$\omega_n^2 = \frac{E\Theta}{\varrho f} \cdot k_n^4 \qquad \text{und} \qquad \nu_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{E\Theta}{\varrho f}} \cdot \frac{M_n^2}{l^2} \qquad (20)$$

In den Koordinaten (y,z) errechnet man für das Flächenträgheitsmoment einer Ellipse $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - z^2}$ bei Schwingung in Richtung der kleinen Halbachse b:



$$\Theta_b = \iint y^2 df = \int_{-a}^{+a}\int_{-b}^{+b} y^2\, dy\, dz = \int_{-a}^{+a} \frac{2}{3} y^3\, dz = \frac{2b^3}{3a^3}\int \left(a^2 - z^2\right)^{3/2} dz =$$

$$\Theta_b = \frac{2b^3}{3a^3}\int_{-a}^{+a} a^2\sqrt{a^2 - z^2}\, dz - \frac{2b^3}{3a^3}\int_{-a}^{+a} z^2\sqrt{a^2 - z^2}\, dz = \frac{2b^3}{3a^3}\left(a^2 \cdot \frac{\pi a^2}{2} - \frac{\pi a^4}{8}\right) =$$

$$\Theta_b = \frac{2b^3}{3a^3} \cdot \frac{3}{8}\pi a^4 = \Theta_b = \frac{\pi a b^3}{4} \qquad (21a)$$

Für eine Schwingung in Richtung der großen Halbachse a wird:

$$\Theta_a = \frac{\pi a^3 b}{4} \qquad (21b)$$

Mit der Ellipsenfläche $f = \pi ab$ folgt dann:

$$\nu_{n-} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{E}{\varrho}} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{M_n^2}{l^2}, \quad \text{also} \quad \nu_{n-} \sim b \qquad (22a)$$

$$\nu_{n+} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{E}{\varrho}} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{M_n^2}{l^2}, \quad \text{also} \quad \nu_{n+} \sim a \qquad (22b)$$

Das Quadrat der Resonanzfrequenz zur Berechnung des E-Moduls nach (17) oder (18) muß beim Übergang vom Kreisquerschnitt $f = \pi r^2$ zum Ellipsenquerschnitt $f = \pi ab$ durch das Produkt beider Einzelfrequenzen ν_{n+} und ν_{n-} ersetzt werden[18]:

$$\nu_n^2 \longrightarrow \nu_{n+} \cdot \nu_{n-} = \overline{\nu_n^2} \qquad (23)$$

4. Eigenwerte

Zur Berechnung des Elastizitätsmoduls aus den Resonanzfrequenzen müssen außer den Stabdaten die Eigenwerte M_n bekannt sein. Sie folgen aus der Lösung der Differentialgleichung (13) mit Berücksichtigung der Randwerte, die zur Bestimmung der Konstanten A_n, B_n, C_n, D_n dienen:

$$\psi_n(x) = A_n \cdot \sin(k_n x) + B_n \cdot \cos(k_n x) + C_n \cdot \sinh(k_n x) + D_n \cdot \cosh(k_n x) \qquad (24)$$

Zur vollständigen Lösung $y(x,t)$ der Biegeschwingungsgleichung (9) gehört noch die Zeitabhängigkeit, die sich aus (12) ergibt:

$$v_n(t) = a_n \cdot \sin(\omega_n t) + b_n \cdot \cos(\omega_n t) \qquad (25)$$

Im eingeschwungenen Zustand kann man als Anfangsbedingungen für einen Zeitpunkt $t_o = 0$ setzen:

$$v_n(0) = y_{on} = a_n \cdot \sin(\omega_n t_o) + b_n \cdot \cos(\omega_n t_o) \qquad (26a)$$

$$\dot{v}_n(0) = 0 = a_n \cdot \cos(\omega_n t_o) - b_n \cdot \sin(\omega_n t_o) \qquad (26b)$$

Daraus folgt $a_n = 0$ und $b_n = y_{on}$, und die Amplitude ändert sich sinusförmig mit der Zeit:

$$\boxed{v_n(t) = y_{on} \cdot \cos(\omega_n t)} \qquad (27)$$

Aus (24) folgt die örtliche Variation der Amplitude. -

Die Randbedingungen betreffen Ableitungen der Eigenfunktion (24), die mit $k_n = \frac{M_n}{l}$ folgende Form haben:

$$\psi_n(x) = \left[A_n \sin\left(\frac{M_n x}{l}\right) + B_n \cos\left(\frac{M_n x}{l}\right) + C_n \sinh\left(\frac{M_n x}{l}\right) + D_n \cosh\left(\frac{M_n x}{l}\right)\right] = 1 \cdot \tilde{\psi}_n^0(x) \qquad (28)$$

$$\psi_n'(x) = \frac{M_n}{l}\left[A_n \cos\left(\frac{M_n x}{l}\right) - B_n \sin\left(\frac{M_n x}{l}\right) + C_n \cosh\left(\frac{M_n x}{l}\right) + D_n \sinh\left(\frac{M_n x}{l}\right)\right] = \frac{M_n}{l} \cdot \tilde{\psi}_n'(x) \qquad (28a)$$

$$\psi_n''(x) = \frac{M_n^2}{l^2}\left[-A_n \sin\left(\frac{M_n x}{l}\right) - B_n \cos\left(\frac{M_n x}{l}\right) + C_n \sinh\left(\frac{M_n x}{l}\right) + D_n \cosh\left(\frac{M_n x}{l}\right)\right] = \frac{M_n^2}{l^2} \cdot \tilde{\psi}_n''(x) \qquad (28b)$$

$$\psi_n'''(x) = \frac{M_n^3}{l^3}\left[-A_n \cos\left(\frac{M_n x}{l}\right) + B_n \sin\left(\frac{M_n x}{l}\right) + C_n \cosh\left(\frac{M_n x}{l}\right) + D_n \sinh\left(\frac{M_n x}{l}\right)\right] = \frac{M_n^3}{l^3} \cdot \tilde{\psi}_n'''(x) \qquad (28c)$$

$$\psi_n''''(x) = \frac{M_n^4}{l^4}\left[+A_n \sin\left(\frac{M_n x}{l}\right) + B_n \cos\left(\frac{M_n x}{l}\right) + C_n \sinh\left(\frac{M_n x}{l}\right) + D_n \cosh\left(\frac{M_n x}{l}\right)\right] = \frac{M_n^4}{l^4} \cdot \tilde{\psi}_n''''(x) \qquad (28d)$$

Man erkennt dabei, daß der Klammerausdruck der trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen nach je vier Ableitungen reproduziert wird, wie es Gleichung (13) fordert. -

Für Stäbe mit freien Enden, die in den Schwingungsknoten gelagert sind, benutzt man im Hinblick auf die späteren Rechnungen mit Zusatzmassen zweckmäßig die Randbedingungen "kein biegendes Moment" und "keine biegende Scherkraft" nur am Stabanfang x = 0; nicht auch am Stabende x = l. Dafür wählt man als zusätzliche Bedingungen: Amplitude, Neigung, Krümmung und Änderung der Krümmung in der Stabmitte x = 1/2. Sie unterscheiden sich für gerade Schwingungsordnungen n (Grund- und geradzahlige Oberschwingungen) und ungerade. Man bekommt so:

"Keine Amplitude" $\quad \left(y \right)_{x=1/2} = 0 \qquad (29a)$

"Keine Neigung" $\quad \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x=1/2} = 0 \qquad (29b)$

Da die Krümmung dem Krümmungsradius umgekehrt proportional ist, bedeuten weiter nach Gleichung (4):

"Keine Krümmung" $\quad \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_{x=1/2} = 0 \qquad (29c)$

"Konstante Krümmung" $\quad \left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \right)_{x=1/2} = 0 \qquad (29d)$

Die beiden Randbedingungen bei x = 0 gelten für alle n:

I. Kein biegendes Moment am Stabanfang (vgl. 6):

$$D = -E\Theta \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_{x=0} = 0 \quad \text{und} \quad \tilde{\varphi}_n''(0) = 0 \qquad (30a)$$

Damit folgt für die Konstanten aus (28b) die Beziehung:

$$-B_n + D_n = 0 \quad \text{und} \quad D_n = B_n \qquad (31a)$$

II. Keine biegende Scherkraft am Stabanfang (vgl. 7):

$$Q = -E\Theta \left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \right)_{x=0} = 0 \quad \text{und} \quad \tilde{\varphi}_n'''(0) = 0 \qquad (30b)$$

Dann besteht nach (28c) der Zusammenhang:

$$-A_n + C_n = 0 \quad \text{und} \quad C_n = A_n . \qquad (31b)$$

Die beiden Bedingungen bei x = 1/2 müssen für gerade und ungerade Ordnungen n getrennt angegeben werden:

III gerade: In der Stabmitte Schwingungsbauch, also keine Neigung; daher mit (29b): $\tilde{\psi}_n'(1/2) = 0$ (30c)

Dazu muß in Gleichung (28a) das Argument $\left(\frac{M_n x}{l}\right) = \left(\frac{M_n}{l}\frac{l}{2}\right) = \left(\frac{M_n}{2}\right)$ eingesetzt werden; zur Vereinfachung und Verdeutlichung der Rechenschritte werden hier und in den folgenden Abschnitten einheitliche Argumente der trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen (letztere zur besseren Unterscheidung unterstrichen) sowie der Index n der Konstanten weggelassen.

Argument: $((M_n/2))$

Mit (28a) und (31a,b):

$$A\cos - B\sin + C\,\underline{\cosh} + D\,\underline{\sinh} = 0$$

$$A(\cos + \underline{\cosh}) - B(\sin - \underline{\sinh}) = 0$$

$$\frac{A}{B} = \frac{\sin - \underline{\sinh}}{\cos + \underline{\cosh}} \qquad (31c)$$

IV gerade: In der Stabmitte Schwingungsbauch, also konstante Krümmung; daher mit (29d): $\tilde{\psi}_n'''(1/2) = 0$ (30d)

Mit (28c) und (31a,b):

$$-A\cos + B\sin + C\,\underline{\cosh} + D\,\underline{\sinh} = 0$$

$$-A(\cos - \underline{\cosh}) + B(\sin + \underline{\sinh}) = 0$$

$$\frac{A}{B} = \frac{\sin + \underline{\sinh}}{\cos - \underline{\cosh}} \qquad (31d)$$

Aus der Zusammenfassung von (31c,d) bekommt man die Eigenwertgleichung:

$$\frac{\sin - \underline{\sinh}}{\cos + \underline{\cosh}} = \frac{\sin + \underline{\sinh}}{\cos - \underline{\cosh}}$$

$$\sin\cos - \sin\underline{\cosh} - \cos\underline{\sinh} + \underline{\sinh}\,\underline{\cosh} = \sin\cos + \sin\underline{\cosh} + \cos\underline{\sinh} + \underline{\sinh}\,\underline{\cosh}$$

$$2\sin\underline{\cosh} + 2\cos\underline{\sinh} = 0$$

und nach Division durch $2\cos\underline{\cosh}$:

$$\frac{\sin}{\cos} + \frac{\underline{\sinh}}{\underline{\cosh}} = 0 \quad \text{oder} \quad \boxed{\tan\frac{M_n}{2} + \underline{\tanh}\frac{M_n}{2} = 0} \qquad (32a)$$

Für ungerade Schwingungsordnungen gilt entsprechend:

III ungerade: In der Stabmitte Schwingungsknoten, also keine Amplitude; daher mit (29a): $\tilde{\psi}_n^0(1/2) = 0$ (30e)

Mit (28) und (31a,b):

$$A \sin + B \cos + C \underline{\sinh} + D \underline{\cosh} = 0$$

$$A(\sin + \underline{\sinh}) + B(\cos + \underline{\cosh}) = 0$$

$$\frac{A}{B} = -\frac{\cos + \underline{\cosh}}{\sin + \underline{\sinh}} \qquad (31e)$$

IV ungerade: In der Stabmitte Schwingungsknoten, also keine Krümmung; daher mit (29c): $\tilde{\psi}_n''(1/2) = 0$ (30f)

Mit (28b) und (31a,b):

$$-A \sin - B \cos + C \underline{\sinh} + D \underline{\cosh} = 0$$

$$-A(\sin - \underline{\sinh}) - B(\cos - \underline{\cosh}) = 0$$

$$\frac{A}{B} = -\frac{\cos - \underline{\cosh}}{\sin - \underline{\sinh}} \qquad (31f)$$

(31e,f) zusammen ergeben die Eigenwertgleichung:

$$\frac{\cos + \underline{\cosh}}{\sin + \underline{\sinh}} = \frac{\cos - \underline{\cosh}}{\sin - \underline{\sinh}}$$

$$\sin\cos + \sin\underline{\cosh} - \cos\underline{\sinh} - \underline{\sinh}\,\underline{\cosh} = \sin\cos - \sin\underline{\cosh} + \cos\underline{\sinh} - \underline{\sinh}\,\underline{\cosh}$$

$$2 \sin\underline{\cosh} - 2 \cos\underline{\sinh} = 0$$

und nach Division durch 2 cos cosh :

$$\frac{\sin}{\cos} - \frac{\underline{\sinh}}{\underline{\cosh}} = 0 \quad \text{oder} \quad \boxed{\tan\frac{M_n}{2} - \underline{\tanh}\frac{M_n}{2} = 0} \qquad (32b)$$

Aus den Gleichungen (32a,b) lassen sich die Eigenwerte M_n der verschiedenen Schwingungsordnungen errechnen; die ersten Eigenwerte sind:

$M_0 = 4.730\,041$; $M_1 = 7.853\,205$;
$M_2 = 10.995\,608$; $M_3 = 14.137\,166$;
$M_4 = 17.278\,760$; $M_5 = 20.420\,352$.

Die M_n nähern sich mit wachsender Ordnung n schnell den Werten:

$$M_n \approx \tilde{M}_n = (n + \tfrac{3}{2}\pi) \qquad (33)$$

Schon $\tilde{M}_2$ stimmt mit M_2 in den ersten sechs Stellen überein.

Berechnet man die Eigenwerte von Stäben ohne Zusatzmassen an den Enden mit den Randbedingungen für x = l statt für x = l/2, so kommt man schneller zu einem Ergebnis in der Form: $\cos M_n \cdot \underline{\cosh} M_n = 1$.
Diese Eigenwertgleichung ergibt sich auch beim Gleichsetzen von (32a) und (32b) und Übergang vom Argument $M_n/2$ zu M_n . Doch erlaubt die einfachere Herleitung keine Erweiterung auf den Fall von Stäben mit Zusatzmassen an den Enden. -

5. Schwingungsknoten, Wellenlänge

Schwingungsknoten befinden sich in den Punkten X_{nj} des Stabes, in denen die Amplitude y zeitunabhängig Null ist. Dort muß also mit (31a,b) gelten:

$$A_n \cdot \underline{\sin}\left(\frac{M_n X_{nj}}{l}\right) + B_n \cdot \cos\left(\frac{M_n X_{nj}}{l}\right) + A_n \cdot \underline{\sinh}\left(\frac{M_n X_{nj}}{l}\right) + B_n \cdot \underline{\cosh}\left(\frac{M_n X_{nj}}{l}\right) = 0 \quad (34)$$

Eine Beziehung zwischen A_n und B_n liefern für gerade Schwingungsordnungen (31d) und (32a):

n gerade:
$$A = B\,\frac{\underline{\sin} + \underline{\sinh}}{\cos - \underline{\cosh}} = B\,\frac{\underline{\sin}\left(1 + \frac{\underline{\sinh}}{\underline{\sin}}\right)}{\cos\left(1 - \frac{\underline{\cosh}}{\cos}\right)}$$

$$\frac{\underline{\sin}}{\cos} = \tan = -\underline{\tanh} = -\frac{\underline{\sinh}}{\underline{\cosh}} \quad \text{oder} \quad \frac{\underline{\sinh}}{\underline{\sin}} = -\frac{\underline{\cosh}}{\cos} \text{ , also}$$

$$A = B\,\frac{\underline{\sin}\left(1 - \frac{\underline{\cosh}}{\cos}\right)}{\cos\left(1 - \frac{\underline{\cosh}}{\cos}\right)} \qquad A_n = B_n \cdot \tan\frac{M_n}{2} \quad (35a)$$

Damit bekommt man die Gleichung für die Knoten X_{nj} gerader Schwingungsordnungen:

$$\boxed{\tan\frac{M_n}{2} \cdot \left[\underline{\sin}\left(\frac{M_n X_{nj}}{l}\right) + \underline{\sinh}\left(\frac{M_n X_{nj}}{l}\right)\right] + \left[\cos\left(\frac{M_n X_{nj}}{l}\right) + \underline{\cosh}\left(\frac{M_n X_{nj}}{l}\right)\right] = 0} \quad (36a)$$

n ungerade: Beziehungen (31e) und (32b):

$$A = -B\,\frac{\cos + \underline{\cosh}}{\underline{\sin} + \underline{\sinh}} = -B\,\frac{\cos\left(1 + \frac{\underline{\cosh}}{\cos}\right)}{\underline{\sin}\left(1 + \frac{\underline{\sinh}}{\underline{\sin}}\right)}$$

$$\frac{\sin}{\cos} = \tan = +\frac{\sinh}{\cosh} \quad \text{oder} \quad \frac{\cosh}{\cos} = \frac{\sinh}{\sin}$$

$$\text{also} \quad A = -B \cdot \frac{\cos\left(1+\frac{\sinh}{\sin}\right)}{\sin\left(1+\frac{\sinh}{\sin}\right)} \qquad A_n = -B_n \cdot \cot\frac{M_n}{2} \qquad (35b)$$

Damit bekommt man über die Umkehrung $B_n = -A_n \cdot \tan\frac{M_n}{2}$

die Gleichung für die Knoten X_{nj} ungerader Ordnungen:

$$\boxed{\left[\sin\left(\frac{M_n X_{nj}}{l}\right) + \sinh\left(\frac{M_n X_{nj}}{l}\right)\right] - \tan\frac{M_n}{2}\left[\cos\left(\frac{M_n X_{nj}}{l}\right) + \cosh\left(\frac{M_n X_{nj}}{l}\right)\right] = 0} \qquad (36b)$$

Für höhere Schwingungsordnungen kann die Näherung (33)

angewandt werden: $\tan\frac{M_n}{2} \longrightarrow \tan\frac{\tilde{M}_n}{2} = \tan\left(\frac{n+\frac{1}{2}}{2}\right)\pi = \tan\left(\frac{2n+3}{4}\pi\right)$

gerade n: $\tan\left(\frac{7}{4}\pi\right) = \tan\left(\frac{11}{4}\pi\right) = \ldots = -1$

ungerade n: $\tan\left(\frac{5}{4}\pi\right) = \tan\left(\frac{9}{4}\pi\right) = \ldots = +1$

Dann gilt für alle n:

$$\sin\left(\frac{M_n X_{nj}}{l}\right) - \cos\left(\frac{M_n X_{nj}}{l}\right) = \cosh\left(\frac{M_n X_{nj}}{l}\right) - \sinh\left(\frac{M_n X_{nj}}{l}\right) \longrightarrow 0$$

Die Differenz der hyperbolischen Funktionen geht mit wachsendem Argument gegen Null, so daß dann übrig bleibt:

$$\sin\left(\frac{M_n X_{nj}}{l}\right) = \cos\left(\frac{M_n X_{nj}}{l}\right)$$

Gleichheit besteht für

$$\frac{M_n X_{nj}}{l} = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \text{bei } j=1 \\ \frac{5\pi}{4} & \text{bei } j=2 \\ \frac{9\pi}{4} & \text{bei } j=3 \quad \ldots \end{cases}$$

und mit (33): $\tilde{M}_n = (n+\frac{1}{2})\pi$

$$\frac{(n+\frac{1}{2})\pi \cdot X_{nj}}{l} = \frac{4j-3}{4}\pi \quad \text{oder} \quad \boxed{X_{nj} = \frac{4j-3}{4n+6} \cdot l} \qquad (37)$$

Diese Näherung wird umso genauer, je höher die Schwingungsordnung n ist, und je weiter innen die Knoten liegen. - Man kann mit (37) eine Wellenlänge im elastischen Medium definieren[34]: der doppelte Abstand innerer Knoten entspricht der Länge λ_n einer Welle n^{ter} Ordnung:

$$\lambda_n = \frac{4(j+2)-3}{4n+6}\,l - \frac{4j-3}{4n+6}\,l = \frac{8}{4n+6}\,l$$

$$\underline{\underline{\lambda_n = \frac{4}{2n+3}\,l}} \qquad (38)$$

Mit Hilfe der Wellenlänge können die verschiedenen Schwingungsordnungen mit Stablänge und Durchmesser in Relation gebracht werden. -

6. Trägheit von Zusatzmassen an den Stabenden

Zur elektromagnetischen Schwingungsübertragung befinden sich an den Enden der Stäbe ferromagnetische Ringe, deren Schwerpunkt im Mittelpunkt der Stabendfläche liegt. Sie wirken wie translatorisch und rotatorisch träge Zusatzmassen.

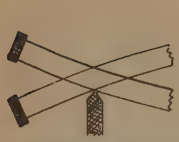
Als Näherung wird gelegentlich der Einfluß von Zusatzmassen graphisch durch Extrapolation auf $P_z = 0$ ermittelt[78]. - Berechnungen findet man in der Literatur meist nur für einseitig eingespannte Stäbe mit Zusatzmasse am freien Ende[12,28]; ohne rotatorische Trägheit[45]; mit riesiger Masse zur Erreichung tiefer Eigenfrequenzen[31]. - Mit Übertragungskörpern an beiden Enden rechnet GOENS[14]; seine Eigenwertgleichung ist der hier abzuleitenden äquivalent. -

Die Masse eines Ringes wird als halbe Zusatzmasse $P_z/2$ definiert; das Verhältnis von Stabmasse P_o plus Zusatzmasse (beide Ringmassen) zur Stabmasse ergibt die "Relativmasse":

$$P_R = \frac{P_o + P_z}{P_o} = 1 + \frac{P_z}{P_o} \qquad (39)$$

Dann kann die Masse eines Ringes mit der Stabmasse $P_o = \varrho fl$ geschrieben werden:

$$\frac{P_z}{2} = \frac{P_o(P_R - 1)}{2} = \frac{\varrho fl}{2}(P_R - 1) \qquad (40)$$



Translation

Rotation $\varphi = \frac{\partial y}{\partial x}$

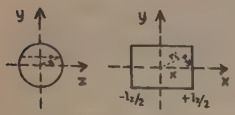
Die Bewegung der Eisenringe bei der Schwingung der Stabenden kann aus einer Translation und einer Rotation zusammengesetzt werden. Dementsprechend treten zwei Arten von Trägheit auf. - Die translatorische Trägheit entspricht einer Zusatzscherkraft Q_z bei Beschleunigung $\ddot{y}$ der Masse $P_z/2$:

$$Q_z = \frac{P_z}{2} \cdot \ddot{y} \qquad \text{oder} \qquad Q_z = \frac{\varrho f l}{2}(\mu_R - 1) \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad (41)$$

Die rotatorische Trägheit ruft bei Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial y}{\partial x}$ ein Drehmoment des Ringes mit dem Massenträgheitsmoment Θ_z hervor:

$$D_z = \Theta_z \cdot \ddot{\varphi} = \Theta_z \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial y}{\partial x} \qquad (42)$$

Das Massenträgheitsmoment eines Hohlzylinders mit der Dichte ϱ_z, der Länge l_z, dem Außenradius R und dem Innenradius r (= Stabradius) bei Drehung um eine Achse in z-Richtung durch den Schwerpunkt beträgt:



$y = r \cdot \sin\vartheta \qquad r_i^2 = x^2 + y^2 = x^2 + r^2 \cdot \sin^2\vartheta$

$$\Theta_z = \iiint r_i^2 \, dm = \varrho_z \iiint r_i^2 \, dV$$

$$\Theta_z = 2\varrho_z \int_{-\frac{l_z}{2}}^{+\frac{l_z}{2}} \int_0^R \int_0^{\pi} (x^2 + r^2 \cdot \sin^2\vartheta)\, r \, d\vartheta \cdot dr \cdot dx$$

$$\Theta_z = 2\varrho_z \iint (\pi x^2 + r^2 \cdot \tfrac{\pi}{2}) r \, dr \cdot dx$$

$$\Theta_z = 2\pi\varrho_z \int \left[\frac{(R^2 - r^2)x^2}{2} + \frac{R^4 - r^4}{8}\right] dx = \pi\varrho_z \left[(R^2 - r^2)\frac{l_z^3}{12} + (R^4 - r^4)\cdot\frac{l_z}{4}\right] = \frac{\pi(R^2 - r^2)\cdot l_z \cdot \varrho_z}{12}\left[l_z^2 + 3(R^2 + r^2)\right]$$

$$\Theta_z = \frac{1}{12}\frac{P_z}{2}\cdot\left[l_z^2 + 3(R^2 + r^2)\right] \qquad \text{oder} \qquad \Theta_z = \frac{\varrho f l(\mu_R - 1)}{24}\left[l_z^2 + 3(R^2 + r^2)\right] \qquad (43)$$

7. Eigenwerte für Stäbe mit Zusatzmassen

Die gegenüber einem unbelasteten Stab veränderten Eigenwerte werden zur Unterscheidung M_n' genannt. Die beiden ersten Randbedingungen gelten wieder für alle Schwingungsordnungen,

die letzten beiden getrennt für gerade und ungerade n. - Die eine Bedingung am Stabanfang ändert sich dahingehend, daß kein resultierendes Drehmoment vorhanden ist:

I. $D + D_z = 0$ und daher mit (6): $D_z = -D = +E\Theta\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_{x=0}$

Bei Berücksichtigung von (9): $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{E\Theta}{\varrho f}\left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\right)$ und (42) bekommt man:

$$D_z = \Theta_z \cdot \frac{\partial^3 y}{\partial t^2 \partial x} = \Theta_z \cdot \left(-\frac{E\Theta}{\varrho f}\right)\left(\frac{\partial^5 y}{\partial x^5}\right)_{x=0} = +E\Theta\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)_{x=0}$$

$$E\Theta \cdot \frac{M_n'^2}{l^2} \cdot \tilde{\psi}_n''(0) = -\Theta_z \cdot \frac{E\Theta}{\varrho f} \cdot \frac{M_n'^5}{l^5} \cdot \tilde{\psi}_n'(0)$$

$$\tilde{\psi}_n''(0) = -\frac{\Theta_z}{\varrho f \cdot l^3} \cdot M_n'^3 \cdot \tilde{\psi}_n'(0) = -b \cdot \tilde{\psi}_n'(0) \qquad (44)$$

Dabei ergibt sich mit (43) für die Konstante b :

$$b = \frac{\Theta_z}{\varrho f l^3} \cdot M_n'^3 = \frac{\varrho f l \cdot (P_R - 1)}{24 \cdot \varrho f l^3}\left[l_z^2 + 3(R^2 + r^2)\right] \cdot M_n'^3$$

$$\underline{b = \frac{P_R - 1}{24 \cdot l^2} \cdot \left[l_z^2 + 3(R^2 + r^2)\right] \cdot M_n'^3} \qquad (44a)$$

Die Zusatzmasse $P_z/2$ wirkt wie eine Scherkraft Q_z am Stabanfang; sie muß nach (7, 41) mit positivem Vorzeichen gerechnet werden, sonst resultieren sinnlose Eigenwerte.

II. $Q_z = -E\Theta\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)_{x=0} = \frac{P_z}{2}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)_{x=0} = \frac{\varrho f l}{2}(P_R - 1)\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)_{x=0}$

Dabei wird nach der Schwingungsgleichung (9) $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ ersetzt:

$$-E\Theta\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)_{x=0} = \frac{\varrho f l}{2}(P_R - 1)\left(-\frac{E\Theta}{\varrho f}\right)\left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\right)_{x=0}$$

$$+\frac{M_n'^3}{l^3} \cdot \tilde{\psi}_n'''(0) = \frac{\varrho f l}{2}(P_R - 1)\frac{1}{\varrho f} \cdot \frac{M_n'^4}{l^4}\tilde{\psi}_n^0(0)$$

$$\tilde{\psi}_n'''(0) = \frac{P_R - 1}{2} \cdot M_n' \cdot \tilde{\psi}_n^0(0) = a \cdot \tilde{\psi}_n^0(0) \qquad (45)$$

Dann hat die Konstante a den Wert:

$$\underline{a = \frac{P_R - 1}{2} \cdot M_n'} \qquad (45a)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (44, 45) lassen sich die Konstanten C_n und D_n aus (24, 28) durch A_n und B_n ausdrücken (wobei der Index n wieder weggelassen wird):

I. $\tilde{\varphi}_n''(0) = -b\cdot\tilde{\varphi}_n'(0)$

$$-B + D = -b(A + C) \quad \text{oder} \quad D = B - bA - bC \qquad (46a)$$

II. $\tilde{\varphi}_n'''(0) = a\cdot\tilde{\varphi}_n^{o}(0)$

$$-A + C = a(B + D) \quad \text{oder} \quad C = A + aB + aD \qquad (46b)$$

Beide Gleichungen zusammengefaßt ergeben:

$$C = A + aB + a(B - bA - bC) = A(1 - ab) + 2aB - abC$$

$$C = \frac{(1-ab)A + 2aB}{1 + ab} \qquad (47a)$$

$$D = B - bA - b(A + aB + aD) = -2bA + (1-ab)B - abD$$

$$D = \frac{-2bA + (1-ab)B}{1 + ab} \qquad (47b)$$

Weiter werden bei geraden Ordnungen n wieder die Bedingungen für einen Schwingungsbauch in Stabmitte benutzt (30c,d); bei ungeraden die für einen Knoten (30e,f), und wieder wird das Argument weggelassen: Argument $((M_n'/2))$

III gerade: $\tilde{\varphi}_n'\left(\frac{l}{2}\right) = 0$

$$A\cos - B\sin + C\cosh + D\sinh = 0$$

$$(1+ab)A\cos - (1+ab)B\sin + (1-ab)A\cosh + 2aB\cosh - 2bA\sinh + (1-ab)B\sinh = 0$$

$$A\left[(1+ab)\cos + (1-ab)\cosh - 2b\sinh\right] = B\left[(1+ab)\sin - 2a\cosh - (1-ab)\sinh\right]$$

$$\frac{A}{B} = \frac{(1+ab)\sin - 2a\cosh - (1-ab)\sinh}{(1+ab)\cos + (1-ab)\cosh - 2b\sinh} \qquad (47c)$$

IV gerade: $\tilde{\varphi}_n'''\left(\frac{l}{2}\right) = 0$

$$-A\cos + B\sin + C\cosh + D\sinh = 0$$

$$-(1+ab)A\cos + (1+ab)B\sin + (1-ab)A\cosh + 2aB\cosh - 2bA\sinh + (1-ab)B\sinh = 0$$

$$A\left[-(1+ab)\cos + (1-ab)\cosh - 2b\sinh\right] = B\left[-(1+ab)\sin - 2a\cosh - (1-ab)\sinh\right]$$

$$\frac{A}{B} = \frac{-(1+ab)\sin - 2a\cosh - (1-ab)\sinh}{-(1+ab)\cos + (1-ab)\cosh - 2b\sinh} \qquad (47d)$$

Aus der Zusammenfassung von (47c,d) bekommt man die Eigenwertgleichung:

$$-(1+ab)^2 \sin\cos + (1+ab)\sin\left[(1-ab)\cosh - 2b\sinh\right] - (1+ab)\cos\left[-2a\cosh - (1-ab)\sinh\right] + \left[-2a\cosh - (1-ab)\sinh\right]\left[(1-ab)\cosh - 2b\sinh\right] =$$

$$= -(1+ab)^2 \sin\cos - (1+ab)\sin\left[(1-ab)\cosh - 2b\sinh\right] + (1+ab)\cos\left[-2a\cosh - (1-ab)\sinh\right] + \left[-2a\cosh - (1-ab)\sinh\right]\left[(1-ab)\cosh - 2b\sinh\right]$$

$$2(1+ab)\sin\left[(1-ab)\cosh - 2b\sinh\right] = 2(1+ab)\cos\left[-2a\cosh - (1-ab)\sinh\right]$$

$$(1-ab)\sin\cosh - 2b\sin\sinh = -2a\cos\cosh - (1-ab)\cos\sinh$$

Nach Division durch $\cos\cdot\cosh$ folgt die Gleichung für gerade n:

$$(1-ab)\tan - 2b\tan\tanh = -2a - (1-ab)\tanh$$

$$\boxed{(1-ab)\left(\tan\frac{M_n'}{2} + \tanh\frac{M_n'}{2}\right) + 2\left(a - b\cdot\tan\frac{M_n'}{2}\cdot\tanh\frac{M_n'}{2}\right) = 0} \qquad (48a)$$

Für ungerade Schwingungsordnungen gilt entsprechend:

III ungerade: $\tilde{\psi}_n^{\circ}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

$$A\sin + B\cos + C\sinh + D\cosh = 0$$

$$(1+ab)A\sin + (1+ab)B\cos + (1-ab)A\sinh + 2aB\sinh - 2bA\cosh + (1-ab)B\cosh = 0$$

$$A\left[(1+ab)\sin + (1-ab)\sinh - 2b\cosh\right] = B\left[-(1+ab)\cos - 2a\sinh - (1-ab)\cosh\right]$$

$$\frac{A}{B} = \frac{-(1+ab)\cos - 2a\sinh - (1-ab)\cosh}{(1+ab)\sin + (1-ab)\sinh - 2b\cosh} \qquad (47e)$$

$$\tilde{\psi}_n^{u}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$-A\sin - B\cos + C\sinh + D\cosh = 0$$

$$-(1+ab)A\sin - (1+ab)B\cos + (1-ab)A\sinh + 2aB\sinh - 2bA\cosh + (1-ab)B\cosh = 0$$

$$A\left[-(1+ab)\sin + (1-ab)\sinh - 2b\cosh\right] = B\left[(1+ab)\cos - 2a\sinh - (1-ab)\cosh\right]$$

$$\frac{A}{B} = \frac{(1+ab)\cos - 2a\sinh - (1-ab)\cosh}{-(1+ab)\sin + (1-ab)\sinh - 2b\cosh} \qquad (47f)$$

Aus der Zusammenfassung von (47e,f) bekommt man die Eigenwertgleichung:

$$(1+ab)^2\sin\cos - (1+ab)\sin\left[-2a\sinh - (1-ab)\cosh\right] - (1+ab)\cos\left[(1-ab)\sinh - 2b\cosh\right] + \left[-2a\sinh - (1-ab)\cosh\right]\left[(1-ab)\sinh - 2b\cosh\right] =$$

$$= (1+ab)^2\sin\cos + (1+ab)\sin\left[-2a\sinh - (1-ab)\cosh\right] + (1+ab)\cos\left[(1-ab)\sinh - 2b\cosh\right] + \left[-2a\sinh - (1-ab)\cosh\right]\left[(1-ab)\sinh - 2b\cosh\right]$$

$$2(1+ab)\sin\left[-2a\sinh - (1-ab)\cosh\right] + 2(1+ab)\cos\left[(1-ab)\sinh - 2b\cosh\right] = 0$$

$$-2a\sin\sinh - (1-ab)\sin\cosh + (1-ab)\cos\sinh - 2b\cos\cosh = 0$$

Nach Division durch $\cos\cdot\cosh$ folgt die Gleichung für ungerade n:

$$-2a\tan\tanh - (1-ab)\tan + (1-ab)\tanh - 2b = 0$$

$$\boxed{(1-ab)\left(\tan\frac{M_n'}{2} - \tanh\frac{M_n'}{2}\right) + 2\left(a\cdot\tan\frac{M_n'}{2}\cdot\tanh\frac{M_n'}{2} + b\right) = 0} \qquad (48b)$$

Mit einiger Mühe kann man aus den Eigenwertgleichungen (48a,b) die Eigenwerte M_n' eines Stabes mit Zusatzmassen an den Enden graphisch bestimmen. Es zeigte sich jedoch in der vorliegenden Arbeit, daß es im Interesse einer genügenden Genauigkeit besser ist, sie auf einer elektronischen Rechenanlage auszurechnen. -

8. Schwingungsknoten von Stäben mit Zusatzmassen

Da in der Literatur zum Problem der Verschiebung von Schwingungsknoten eines Stabes unter dem Einfluß von Zusatzmassen an seinen Enden keine Angaben gefunden werden konnten, soll hier eine Lösung - abhängig von den Größen a und b der Zusatzmassen - angegeben werden. Dazu müssen die Orte X_{nj}'/l des Stabes ermittelt werden, an denen die Amplitudengleichung (28) Nullstellen hat:

$$A_n\cdot\sin\left(\frac{M_n'X_{nj}'}{l}\right) + B_n\cdot\cos\left(\frac{M_n'X_{nj}'}{l}\right) + C_n\cdot\sinh\left(\frac{M_n'X_{nj}'}{l}\right) + D_n\cdot\cosh\left(\frac{M_n'X_{nj}'}{l}\right) = 0$$

Die Konstanten eliminiert man mit Hilfe der Randwerte; dabei können (47a,b) direkt benutzt werden:

$$C = \frac{(1-ab)A + 2aB}{(1+ab)} \quad ; \quad D = \frac{-2bA + (1-ab)B}{(1+ab)} \quad .$$

Eine Beziehung zwischen A und B muß getrennt für gerade und ungerade Ordnungen hergestellt werden; es zeigt sich, daß (35a,b) auch bei Stäben mit Zusatzmassen erhalten bleiben:

Für gerade n wird (47c) nach A aufgelöst und mit $\tan\cdot\frac{\cos}{\sin}$ erweitert; danach wird im Zähler die Zusammenfassung von (47c,d) in der Form vor Division durch cos·cosh eingesetzt; so werden Zähler und Nenner gleich:

$$A = B\cdot\tan\cdot\frac{(1+ab)\sin\cos - 2a\cos\cosh - (1-ab)\cos\sinh}{(1+ab)\sin\cos + (1-ab)\sin\cosh - 2b\sin\sinh} = B\cdot\tan\cdot\frac{(1+ab)\sin\cos + (1+ab)\sin\cosh - 2b\sin\sinh}{(1+ab)\sin\cos + (1-ab)\sin\cosh - 2b\sin\sinh}$$

$$A_n = B_n\cdot\tan\frac{M'_n}{2} \qquad (35a)$$

Entsprechend verfährt man für ungerade n mit (47e), wobei nach B aufgelöst und ebenfalls mit $\tan\cdot\frac{\cos}{\sin}$ erweitert wird:

$$B = A\cdot\tan\cdot\frac{(1+ab)\sin\cos + (1-ab)\cos\sinh - 2b\cos\cosh}{-(1+ab)\sin\cos - 2a\sin\sinh - (1-ab)\sin\cosh} = A\cdot\tan\cdot\frac{(1+ab)\sin\cos + 2a\sin\sinh + (1-ab)\sin\cosh}{-(1+ab)\sin\cos - 2a\sin\sinh - (1-ab)\sin\cosh}$$

$$B_n = -A_n\cdot\tan\frac{M'_n}{2} \qquad (35b)$$

Beim Einsetzen in die Amplitudengleichung (28) müssen zwei Argumente unterschieden werden, deswegen die Substitutionen:

$$\frac{M'_n}{2} = \alpha \qquad \text{und} \qquad M'_n\cdot\frac{X'_{ai}}{l} = \beta$$

n gerade: Man rechnet alle Konstanten in B um und erweitert mit (1 + ab) :

$$(1+ab)\cdot\tan\alpha\cdot\sin\beta + (1+ab)\cdot\cos\beta + \left[(1-ab)\tan\alpha + 2a\right]\cdot\sinh\beta + \left[-2b\tan\alpha + (1-ab)\right]\cosh\beta = 0$$

Nach (48a) gilt: $\left[(1-ab)\tan\alpha + 2a\right] = \left[2b\cdot\tan\alpha - (1-ab)\right]\cdot\tanh\alpha$

$$(1+ab)\left(\tan\alpha\cdot\sin\beta + \cos\beta\right) + \left[(1-ab) - 2b\cdot\tan\alpha\right]\left(-\tanh\alpha\cdot\sinh\beta + \cosh\beta\right) = 0$$

$$\frac{1+ab}{(1-ab)-2b\cdot\tan\alpha}\left(\frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta + \cos\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha}\right) + \left(\frac{-\sinh\alpha\cdot\sinh\beta + \cosh\alpha\cdot\cosh\beta}{\cosh\alpha}\right) = 0$$

$$\frac{1+ab}{(1-ab)-2b\cdot\tan\alpha}\cdot\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha} + \frac{\cosh(\alpha-\beta)}{\cosh\alpha} = 0$$

$$\boxed{\frac{1+ab}{(1-ab)-2b\cdot\tan\frac{M'_n}{2}}\cdot\frac{\cos\left(M'_n\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{X'_{ai}}{l}\right)\right)}{\cos\frac{M'_n}{2}} + \frac{\cosh\left(M'_n\left(\frac{1}{2}-\frac{X'_{ai}}{l}\right)\right)}{\cosh\frac{M'_n}{2}} = 0} \qquad (49a)$$

n ungerade: Man rechnet alle Konstanten in A um und erweitert mit (1 + ab) :

$$(1+ab)\cdot\sin\beta - (1+ab)\cdot\tan\alpha\cdot\cos\beta + \left[(1-ab) - 2a\cdot\tan\alpha\right]\cdot\sinh\beta + \left[-2b - (1-ab)\tan\alpha\right]\cdot\cosh\beta = 0$$

Nach (48b) gilt: $\left[(1-ab) - 2a\cdot\tan\alpha\right]\cdot\tanh\alpha = \left[2b + (1-ab)\tan\alpha\right]$

$$(1+ab)\left(\sin\beta - \tan a\cdot\cos\beta\right) + \left[2b + (1-ab)\tan a\right]\cdot\left(\coth a\cdot\sin\beta - \cos\beta\right) = 0$$

$$\frac{1+ab}{2b+(1-ab)\cdot\tan a}\left(\frac{\cos a\cdot\sin\beta - \sin a\cdot\cos\beta}{\cos a}\right) + \left(\frac{\cosh a\cdot\sinh\beta - \sinh a\cdot\cosh\beta}{\sinh a}\right) = 0$$

$$\frac{1+ab}{2b\cdot\cot a + (1-ab)}\left(\frac{-\cos a\cdot\sin\beta + \sin a\cdot\cos\beta}{\sin a}\right) + \left(\frac{-\cosh a\cdot\sinh\beta + \sinh a\cdot\cosh\beta}{\sinh a}\right) = 0$$

$$\boxed{\frac{1+ab}{(1-ab)+2b\cdot\cot\frac{M_n'}{2}}\cdot\frac{\sin\left(M_n'\left(\frac{1}{2}-\frac{X_{ni}'}{l}\right)\right)}{\sin\frac{M_n'}{2}} + \frac{\sinh\left(M_n'\left(\frac{1}{2}-\frac{X_{ni}'}{l}\right)\right)}{\sinh\frac{M_n'}{2}} = 0} \qquad (49b)$$

Aus (49a,b) kann man die Knoten belasteter Stäbe errechnen. Da aber die rotatorische Trägheit (über b) bei nicht zu großen Zusatzmassen die Eigenwerte M_n' und damit auch die Lage der Schwingungsknoten nur unwesentlich beeinflußt, kann b hier - nur zur Knotenbestimmung, nicht für den E-Modul - ohne Bedenken Null gesetzt werden. Die aus dieser Näherung resultierenden kleinen Lagerungsverschiebungen haben auf Resonanzfrequenz und Dämpfung keinen Einfluß. -

Damit nehmen die Eigenwertgleichungen (48a,b) die Form an:

gerade n: $$\tan\frac{M_n'}{2} + \tanh\frac{M_n'}{2} = -2a = -(P_R-1)\cdot M_n' \qquad (48c)$$

ungerade n: $$\tan\frac{M_n'}{2} - \tanh\frac{M_n'}{2} = -2a\cdot\tan\frac{M_n'}{2}\cdot\tanh\frac{M_n'}{2}$$

und nach Division durch $-\tan\frac{M_n'}{2}\cdot\tanh\frac{M_n'}{2}$

$$\cot\frac{M_n'}{2} - \coth\frac{M_n'}{2} = +2a = +(P_R-1)\cdot M_n' \qquad (48d)$$

Diese Eigenwertgleichungen können graphisch mit einer zur Knotenbestimmung genügenden Genauigkeit gelöst werden; den Verlauf der Kurven zeigt in Abhängigkeit von P_R (G 12), doch sollten für graphische Lösungen im Einzelfall Ausschnitte aus dieser Darstellung in größerem Maßstab benutzt werden. -

Die Knotenbestimmungsgleichungen vereinfachen sich zu:

n gerade:

$$\frac{\cos\left(M'_n\left(\frac{1}{2}-\frac{X'_{nj}}{l}\right)\right)}{\cos\frac{M'_n}{2}} + \frac{\cosh\left(M'_n\left(\frac{1}{2}-\frac{X'_{nj}}{l}\right)\right)}{\cosh\frac{M'_n}{2}} \qquad (49c)$$

n ungerade:

$$\frac{\sin\left(M'_n\left(\frac{1}{2}-\frac{X'_{nj}}{l}\right)\right)}{\sin\frac{M'_n}{2}} + \frac{\sinh\left(M'_n\left(\frac{1}{2}-\frac{X'_{nj}}{l}\right)\right)}{\sinh\frac{M'_n}{2}} \qquad (49d)$$

Mit den Formeln (48c,d) und (49c,d) bestimmte Knotenlagen X'_{nj} sind in Abhängigkeit von der Relativmasse P_R zusammenfassend wiedergegeben in Darstellung (G 6). Auch hier empfiehlt sich zum graphischen Aufsuchen von Schwingungsknoten ein größerer Maßstab. -

Infolge der Näherung b = 0 entfällt z.B. in Gleichung (49a) der Faktor $\frac{1+ab}{(1-ab)-2b\cdot\tan\frac{M'_n}{2}}$. Seine Abweichung von 1 ist für die Grundschwingung gering; so beim Stab PMMA 15 (kurz,dick): Faktor = 0.977; bei PMMA 18: Faktor = 0.999. - Sie nimmt wegen $a \sim M'_n$ und $b \sim M'^3_n$ rasch mit steigender Ordnungszahl zu; z.B. PMMA 18; n = 4: Faktor = 0.935. Die so entstehenden Abweichungen der mit b = 0 berechneten von den exakten Knotenstellen wirken sich jedoch auf das Schwingungsverhalten des Stabes mit zunehmender Schwingungsordnung immer weniger aus, so daß die Näherung b = 0 unbedenklich für alle n benutzt werden kann, vgl. Darstellungen (G 7, 8). -

9. Anwendung der einfachen Biegeschwingungstheorie

Die elementare Theorie der Biegeschwingung von Stäben mit freien Enden und ihre Übertragung auf Stäbe mit Zusatzmassen

führt nur bei langen, dünnen Stäben und niedrigen Schwingungsordnungen, also allgemein bei gegenüber dem Stabdurchmesser hinreichend großer elastischer Wellenlänge λ zu befriedigenden Ergebnissen. Dennoch wurde sie hier mit allen erforderlichen Nebenrechnungen entwickelt, damit der Gang der Rechnungen bei der Vervollkommnung der Biegeschwingungstheorie besser verständlich wird und einige Ergebnisse übernommen werden können. -

In der Literatur findet man fast ausschließlich die Anwendung der elementaren Theorie; überwiegend für Stäbe ohne Zusatzmassen, die die Bedingung "lang und dünn" erfüllen, und bei denen meist nur die Grundschwingung erregt wird, z.B.[6, 13, 24, 25, 48, 69, 78]; mit Oberschwingungen[1, 5].

Einige Autoren bemerken, daß der so berechnete E-Modul bei sukzessiver Verkürzung von Probestäben scheinbar abnimmt [26, 68, 77]. Auf die Notwendigkeit einer Erweiterung der Theorie weist besonders GOENS in einer früheren Arbeit[14] hin. - Später entwickelt er aus einer erweiterten Theorie Näherungsformeln[15], die außer ihm[16 - 19] nur wenige Verfasser benutzen, so FÖRSTER[9], KNESER[34], der die Näherungen auch mit verhältnismäßig kurzen elastischen Biegewellen prüft, und PICKETT[55], der verschiedene Schwingungsgleichungen vergleicht und zur GOENS'schen Näherung noch ein empirisches Glied hinzufügt.

Berechnet man den E-Modul nach der elementaren Theorie, so nimmt er mit kürzerer Wellenlänge λ im elastischen Medium scheinbar ab. Die Größe der Abweichung zeigt sich beim Ver-

gleich mit den Werten von E, die nach der im nächsten Abschnitt zu entwickelnden erweiterten Theorie errechnet werden. Über die Wellenlänge λ kann man Messungen verschiedener Schwingungsordnung n miteinander vergleichen. Gleiche Wellenlänge setzt dann verschiedene Verhältnisse von Stabdurchmesser d zu Stablänge l voraus. -

Nach (38) ist $\lambda_n = \frac{4}{2n+3} \cdot l$, daher bedeutet $\lambda_o = \lambda_n$:

$$\frac{d}{\lambda_o} = \frac{3}{4}\frac{d}{l_o} = \frac{d}{\lambda_n} = \frac{2n+3}{4}\frac{d}{l_n}$$

$$\frac{d}{l_o} = \frac{4}{3}\frac{d}{\lambda_o} \quad \text{und} \quad \frac{d}{l_n} = \frac{4}{2n+3}\frac{d}{\lambda_n} = \frac{4}{2n+3}\frac{d}{\lambda_o}$$

$$\frac{d}{l_n} = \frac{4}{2n+3}\frac{3}{4}\frac{d}{l_o}$$

also: $$\underline{\underline{\frac{d}{l_n} = \frac{3}{2n+3} \cdot \frac{d}{l_o}}} \qquad (50)$$

In der Umkehrung: $$\underline{\underline{\frac{d}{l_o} = \frac{2n+3}{3} \cdot \frac{d}{l_n}}} \qquad (50a)$$

erkennt man, welchem Verhältnis d/l_o die Erregung der n^{ten} Oberschwingung eines Stabes der Länge $l = l_n$ entspricht. -

Messungen an PMMA-Stäben zeigten, daß die Abweichung δE wegen Rechnung nach der elementaren Theorie die Werte annahm:

$$\delta E = -1\,\%\ \text{etwa bei}\ d/l_o = 0.05$$
$$\delta E = -5\,\%\ \text{etwa bei}\ d/l_o = 0.10\ . \qquad (50b)$$

Bei höheren n werden die in (50b) genannten Grenzen wegen (50a) also schon von sehr schlanken Stäben überschritten. -

Die Rechenergebnisse der erweiterten Theorie hängen gegenüber der einfachen zusätzlich von Stabgestalt und Schwingungsordnung, aber auch von der Poissonkonstante m ab. Daher sind die Angaben (50b) nur Richtwerte, die jedoch bei unterschiedlichen Polymeren und auch Metallen mit $m > 0.25$ höchstens in der Größenordnung 10 - 15 % schwanken dürften. -

So bemerkt STANTON[68] bei der sukzessiven Verkürzung rechteckiger Stahlstäbe von $d/l = 0.042$ auf $d/l' = 0.126$ einen monotonen Abfall des E-Moduls um 5 %. -

Sicher wären Korrekturen bei einigen in der Literatur angegebenen E-Modul-Bestimmungen nötig, so z.B. bei [3], wo E von Stäben gleichen Materials, aber verschiedener Gestalt um 35 % schwankt. Bei den Messungen von [22] entspricht der vierten Oberschwingung ein Verhältnis $d/l_o = 0.136$; und vielleicht ist die Änderung des E-Moduls von Eisenstäben bei verschiedener Lagerung (einseitig eingespannt, zweiseitig frei aufliegend) um 20 %, die in der Diskussion bei[38] erwähnt wird, neben schlechter Erfüllung der Randbedingungen auf die Benutzung zu kurzer Biegewellenlängen zurückzuführen.

III. Erweiterte Theorie der Biegeschwingung

Den ersten Ansatz zur Erweiterung der elementaren Theorie machte RAYLEIGH[58], der die rotatorische Trägheit der Stabelemente berücksichtigte. Die von ihm so errechnete Korrektur der Eigenfrequenzen reicht jedoch nicht aus. Eine erweiterte Differentialgleichung, die auch den Einfluß der Scherkräfte berücksichtigt, leitet TIMOSCHENKO[70] her. Sie ist die Grundlage der weiteren theoretischen Rechnungen. -

In einer weiteren Arbeit kommt TIMOSCHENKO[71] zu einer Frequenzkorrektur für prismatische Stäbe, die er auch auf zylindrische überträgt. Dieser Korrekturfaktor, den auch [12] daraufhin angibt, genügt für kurze, dicke Stäbe und höhere Schwingungsordnungen ebenfalls nicht. -

GOENS[15] hat als erster die erweiterte Differentialgleichung für den Fall eines Stabes mit freien Enden, der in den Schwingungsknoten gelagert ist, streng gelöst, wenngleich er im wesentlichen den Lösungsweg nur skizziert, dann aber ausführlich Näherungen, die zu einem Korrekturfaktor für den nach der elementaren Theorie berechneten E-Modul führen, aus der komplizierten Eigenwertgleichung für den praktischen Gebrauch entwickelt. -

In der vorliegenden Arbeit soll eine exakte Lösung der erweiterten Differentialgleichung für Stäbe mit translatorisch und rotatorisch trägen Zusatzmassen an den Enden hergeleitet werden. Die Eigenwertgleichung wird dann recht kompliziert und unübersichtlich, doch lassen sich die Eigenwerte auf ei-

ner elektronischen Rechenanlage schnell mit der gewünschten Genauigkeit ermitteln. Ein ALGOL-Programm, wie es hier für die PMMA-Stäbe benutzt wurde, ist der Arbeit als Beispiel angefügt.

Die Elastizitätstheorie lehrt, daß zur Beschreibung des elastischen Verhaltens isotroper Körper zwei Konstanten bekannt sein müssen. Darauf weisen z.B.[30, 37, 40, 54] hin. TIMOSCHENKOs Differentialgleichung enthält Elastizitätsmodul E, Torsionsmodul G und eine weitere Konstante λ, die von der Querschnittsform des Stabes abhängt.

Die Konstante λ dient zur Berücksichtigung der ungleichmäßigen Verteilung von Schubspannungen über den Querschnitt und der daraus resultierenden Querschnittskrümmung; andere Autoren benutzen andere Bezeichnungen:

$$1/\lambda^{70)} = \zeta^{15)} = \varkappa^{7)} = 1/K^{55)}.$$

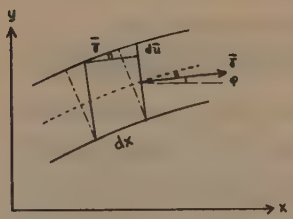
FÖPPL[7] hat den ersten vernünftigen Wert der Konstanten für die statische Biegung von Balken berechnet, die deshalb hier $\varkappa$ genannt werden soll. Allerdings geht er von zu einfachen Ausdrücken für die Schubspannungskomponenten im gebogenen Stab aus, insbesondere ist die Poissonkonstante m in seiner Rechnung nicht enthalten. -

Dem Verfasser ist es dagegen gelungen, $\varkappa$ mit aus den Spannungs-Dehnungs-Beziehungen isotroper Körper nachgerechneten Schubspannungskomponenten in Abhängigkeit von der Poissonkonstanten m zu bestimmen. Damit wird wegen der Beziehung $E/G = 2(1 + m)$ eine in sich geschlossene Darstellung

der Biegeschwingung isotroper Stäbe mit den beiden Konstanten E und m erreicht. -

Die Herleitung und Lösung der erweiterten Differentialgleichung soll zunächst mit der Konstanten κ gezeigt werden, die in einem späteren Abschnitt berechnet werden wird. -

1. Verformung der Stabelemente durch Scherkräfte

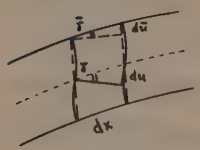


Die beiden Querschnittsflächen f, die ein Stabelement dx begrenzen, werden bei Deformation des Stabelements unter dem Einfluß einer Scherkraft Q um den mittleren Betrag $d\bar{u}$ parallel gegeneinander verschoben. Dabei entsteht zwischen der Tangente an die gebogene Stabachse und der Querschnittsnormalen ein Winkel $\bar{\gamma}$, und die Neigung des Stabelements beträgt statt $\frac{\partial y}{\partial x}$ nur noch φ. In der (x,y)-Ebene ist der Zusammenhang zwischen Schubspannung $\hat{\tau}$, Torsionswinkel $\bar{\gamma}$ und Torsionsmodul G dem Hooke'schen Gesetz ähnlich:

$$\frac{Q}{f} = \hat{\tau} = G\bar{\gamma} \qquad (51)$$

Dann beträgt die mittlere Verschiebung:

$$d\bar{u} = \bar{\gamma}dx = \frac{Q}{f \cdot G}\,dx \qquad (52)$$



In Wirklichkeit ist aber die Schubspannung in der Stabmitte am größten und am Rand in der hier betrachteten Schnittebene Null, wie aus den später zu berechnenden Gleichungen der Schubspannungskomponenten hervorgeht. Daher bleibt der

Querschnitt nicht eben, und $d\bar{u}$ sowie $\bar{\gamma}$ stellen Mittelwerte dar. Ein anschauliches Bild der Größen du und γ in Achsennähe und den Vergleich mit ihren Mittelwerten vermittelt die Skizze des gekrümmten Querschnitts. -

Für benachbarte Punkte auf der Stabachse führt FÖPPL[7] den Korrekturfaktor κ ein, der angibt, um wieviel die Verschiebung du nahe der Stabachse den Wert $d\bar{u}$ übertrifft:

$$du = \kappa \cdot d\bar{u} \quad \text{und} \quad \gamma = \kappa \cdot \bar{\gamma} \qquad (53)$$

Damit wird eine Verknüpfung des Verhaltens achsennaher Schichten, aus deren Betrachtung die erweiterte Differentialgleichung gewonnen wird, mit den über den ganzen Querschnitt des Stabes gemittelten Größen möglich. Es gilt jedoch nicht etwa: $\langle \tau = \kappa \cdot \hat{\tau} \rangle$, denn während hier Verschiebung $d\bar{u}$ und Winkel $\bar{\gamma}$ nur in der (x,y)-Ebene betrachtet werden, hat die Schubkraft auch eine Komponente in z-Richtung, die nicht vernachlässigt werden darf. FÖPPL begründet diesen Punkt damit, daß die Verschiebungen du in den einzelnen Fasern nicht voneinander unabhängig sind, sonst gäbe es eine Zerrung in Richtung der Querschnittshöhe. -

Zur Bestimmung von κ benutzt FÖPPL die Formänderungsarbeit pro Volumeneinheit. Wenn die Teilflächen des Stabquerschnittes im Abstand dx, die ein Volumenelement auf der Stabachse begrenzen, parallel um $du = \kappa \cdot d\bar{u}$ verschoben werden sollen, so kann die dafür erforderliche Arbeit einerseits mit (52) aus der Verschiebung $\kappa \cdot d\bar{u}$ infolge der am Querschnitt angreifenden Scherkraft Q berechnet werden. Andererseits muß sich eine gleichgroße Arbeit aus entsprechender Integration der Quadrate der ortsabhängigen Schubspannungen über den Querschnitt ergeben.

Die Bestimmung der Konstante κ wird in einem späteren Abschnitt ausführlich diskutiert. Zur Herleitung der erweiterten Differentialgleichung der Biegeschwingung soll κ zunächst ohne genaue Kenntnis seines Wertes benutzt werden. Wie aus dem anschaulichen Vergleich von du und dū in der Skizze erkennbar, ist die Konstante größer als 1; TIMOSCHENKO nimmt ohne Erklärung einen Wert von 1.5 an: in diesem Intervall liegt κ jedenfalls für kreisförmigen Querschnitt. -

2. Erweiterte Differentialgleichung

Die Neigung $\frac{\partial y}{\partial x}$ der Querschnittsnormalen eines Stabelements nahe der Stabachse gegen die x-Achse ist infolge seiner Scherung um den Winkel $\gamma = \kappa\bar{\gamma}$ vermindert und beträgt nur:

$$\varphi = \frac{\partial y}{\partial x} - \gamma \qquad (54)$$

Dann ist die Scherkraft mit (51, 53):

$$Q = f \cdot G \cdot \bar{\gamma} = f \cdot G \cdot \frac{\gamma}{\kappa} = \frac{fG}{\kappa}\left(\frac{\partial y}{\partial x} - \varphi\right) \qquad (55)$$

Damit wird aus Gleichung (8) der einfachen Theorie:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \rho f \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{fG}{\kappa}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \qquad (56)$$

Der Zusammenhang zwischen Biegemoment D und Scherkraft Q nach (7) ändert sich jetzt dadurch, daß zum Biegemoment D der Normalspannungen das aus der rotatorischen Trägheit des Stabelements resultierende Moment D_{rot} hinzukommt. - In entsprechender Weise wurden bei der Einführung der Zusatzmassen Biegemoment D des Stabes und Drehmoment D_z des Ringes addiert. -

Der Biegemomentanteil dD des Stabelementes dx geht aus Gleichung (7) unter Berücksichtigung des tatsächlichen Dreh-

winkels $\frac{\partial y}{\partial x} \longrightarrow \varphi$ hervor:

$$dD = -E\Theta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dx \qquad (57a)$$

Der Anteil der rotatorischen Trägheit ergibt mit dem Massenträgheitsmoment $d\Theta_M = \Theta_\varrho dx$:

$$dD_{rot} = d\Theta_M \cdot \ddot{\varphi} = \Theta_\varrho dx \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \qquad (57b)$$

Daher lautet der Zusammenhang mit der Scherkraft Q jetzt:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(D + D_{rot}\right) = Q$$

$$-E\Theta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \Theta_\varrho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = Q \qquad (58)$$

Nach x abgeleitet und mit (56) zusammengefaßt:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -E\Theta \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + \Theta_\varrho \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \cdot \partial t^2} = \varrho f \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{fG}{\kappa} \cdot \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \qquad (58a)$$

Aus der rechten Teilgleichung rechnet man $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ aus und setzt es in die linke ein: $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\kappa}{fG} \cdot \varrho f \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ (58b)

$$-E\Theta\left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \frac{\kappa \varrho}{G} \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \cdot \partial t^2}\right) + \Theta_\varrho \left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \cdot \partial t^2} - \frac{\kappa \varrho}{G} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4}\right) = \varrho f \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$+ \frac{E\Theta}{\varrho f} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \frac{E\Theta}{\varrho f} \frac{\kappa \varrho}{G} \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \cdot \partial t^2} - \frac{\Theta_\varrho}{\varrho f} \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \cdot \partial t^2} + \frac{\Theta_\varrho}{\varrho f} \frac{\kappa \varrho}{G} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

$$\boxed{\frac{E\Theta}{\varrho f} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\Theta}{f}\left(1 + \kappa \frac{E}{G}\right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \cdot \partial t^2} + \frac{\Theta}{f} \cdot \kappa \frac{\varrho}{G} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = 0} \qquad (59)$$

Die erweiterte Differentialgleichung der Biegeschwingung berücksichtigt den Einfluß der Scherkräfte und der rotatorischen Trägheit der Stabelemente.

3. Elastizitätsmodul und Resonanzfrequenzen

Zur Lösung der erweiterten Differentialgleichung wird der Weg beschritten, den GOENS[15] für den Fall eines Stabes ohne Zusatzmassen an den Enden angedeutet hat. - Wie bei der

elementaren Behandlung der Biegeschwingung wird für y das Produkt einer reinen Orts- und einer reinen Zeitfunktion entsprechend Gleichung (10) in die Differentialgleichung eingesetzt:

$$y(x,t) = \psi(x)\cdot v(t) \qquad (60)$$

$$\frac{E\Theta}{\varrho f}\psi^{IV}\cdot v + \psi\cdot\ddot{v} - \frac{\Theta}{f}\left(1+\kappa\frac{E}{G}\right)\cdot\psi''\cdot\ddot{v} + \frac{\Theta}{f}\cdot\kappa\frac{\varrho}{G}\psi\cdot\ddot{\ddot{v}} = 0$$

$$\frac{E\Theta}{\varrho f}\cdot\frac{\psi^{IV}}{\psi} + \frac{\ddot{v}}{v} - \frac{\Theta}{f}\left(1+\kappa\frac{E}{G}\right)\cdot\frac{\psi''\cdot\ddot{v}}{\psi\cdot v} + \frac{\Theta}{f}\cdot\kappa\frac{\varrho}{G}\cdot\frac{\ddot{\ddot{v}}}{v} = 0 \qquad (61)$$

Die Zeitabhängigkeit setzt man wieder wie (12):

$$\frac{\ddot{v}(t)}{v(t)} = -\omega_n^2 = \text{konst} \qquad \text{(Eigenfrequenzen)} \qquad (62)$$

Da in Gleichung (61) neben $\frac{\psi^{IV}(x)}{\psi(x)}$ auch $\frac{\psi''(x)}{\psi(x)}$ vorkommt, müssen die Eigenwerte statt (13) jetzt mit einem zusätzlichen Parameter μ_n versehen werden, der aus der charakteristischen Gleichung bestimmt werden kann:

$$\frac{\psi^{IV}(x)}{\psi(x)} = \mu_n^4\cdot k_n^4 = \text{konst} \qquad \text{(Eigenwerte)} \qquad (63)$$

Dadurch behalten die weiteren Beziehungen (14 - 23) ihre Gültigkeit, und es sollen nur die wichtigsten wiederholt werden:

(14): $\omega_n^2 = \frac{E\Theta}{\varrho f}\cdot k_n^4$

(15): $M_n = k_n\cdot l$ oder $k_n = \frac{M_n}{l}$

(17): $E = \frac{16\pi^2}{M_n^4}\cdot\frac{l^4}{r^2}\cdot\varrho\cdot v_n^2$

(18): $E = \frac{16\pi}{M_n^4}\cdot\frac{l^3}{r^4}\cdot p\cdot v_n^2$

und bei elliptischen Stäben: (23) $v_n^2 \longrightarrow \overline{v_n^2} = v_{n_x}\cdot v_{n_y}$.

Außerdem ändert sich die Zeitabhängigkeit nach (12) bezw. (62) nicht, so daß (25 - 27) ebenfalls erhalten bleiben. - Entscheidend anders und komplizierter aber gestaltet sich jetzt die Bestimmung der Eigenwerte M_n aus den Randwerten. -

4. Eigenwertparameter und charakteristische Gleichung

Durch Einsetzen von (62, 63) in die Differentialgleichung (61) bekommt man die charakteristische Gleichung:

$$\frac{E\Theta}{\varrho f}\mu_n^4 k_n^4 - \omega_n^2 - \frac{\Theta}{f}\left(1+\kappa\frac{E}{G}\right)\cdot\mu_n^2 k_n^2\cdot(-\omega_n^2) + \frac{\Theta}{f}\cdot\kappa\frac{\varrho}{G}\cdot\omega_n^4 = 0$$

Eigenfrequenzen ω_n können nach (14) durch Eigenwerte k_n ersetzt werden:

$$\frac{E\Theta}{\varrho f}\mu_n^4 k_n^4 - \frac{E\Theta}{\varrho f}k_n^4 - \frac{\Theta}{f}\left(1+\kappa\frac{E}{G}\right)\cdot\mu_n^2 k_n^2\left(-\frac{E\Theta}{\varrho f}k_n^4\right) + \frac{\Theta}{f}\cdot\kappa\frac{\varrho}{G}\left(\frac{E\Theta}{\varrho f}k_n^4\right)^2 = 0$$

$$\mu_n^4 k_n^4 - k_n^4 + \frac{\Theta}{f}\left(1+\kappa\frac{E}{G}\right)\mu_n^2 k_n^6 + \frac{\Theta^2}{f^2}\cdot\kappa\frac{E}{G}\cdot k_n^8 = 0 \qquad (64)$$

Wegen $$\frac{E}{G} = 2\cdot(1+m) \qquad (65)$$

nennt man zur Abkürzung: $$\kappa\frac{E}{G} = 2\kappa\cdot(1+m) = U \qquad (66)$$

Gleichung (64) wird durch k_n^4 dividiert und ergibt mit (15) eine Bestimmungsgleichung vierten Grades für μ_n:

$$\mu_n^4 - 1 + \frac{\Theta}{f}(1+U)\cdot\mu_n^2 k_n^2 + \frac{\Theta^2}{f^2}\cdot U\cdot k_n^4 = 0$$

$$\mu_n^4 + \frac{\Theta}{f l^2}(1+U)\cdot M_n^2\cdot\mu_n^2 + \frac{\Theta^2}{f^2 l^4}\cdot U\cdot M_n^4 - 1 = 0 \qquad (67)$$

$$\mu_n^2 = -\frac{\Theta}{2fl^2}(1+U)\cdot M_n^2 \pm \sqrt{\frac{\Theta^2}{4f^2l^4}(1+U)^2\cdot M_n^4 - \frac{4\Theta^2}{4f^2l^4}\cdot U\cdot M_n^4 + 1}$$

$$\mu_{nI}^2 = +\sqrt{\frac{\Theta^2}{4f^2l^4}\cdot(1-U)^2\cdot M_n^4 + 1} - \frac{\Theta}{2fl^2}(1+U)\cdot M_n^2 = \alpha_n^2 \qquad (68a)$$

$$\mu_{nII}^2 = -\sqrt{\frac{\Theta^2}{4f^2l^4}\cdot(1-U)^2\cdot M_n^4 + 1} - \frac{\Theta}{2fl^2}(1+U)\cdot M_n^2 = -\beta_n^2 \qquad (68b)$$

$$\mu_{n1,2} = \pm\alpha_n \quad \text{und} \quad \mu_{n3,4} = \pm i\beta_n \qquad (69)$$

Damit lautet die allgemeine Lösung der Ortsabhängigkeit (63) jetzt statt (24) mit verschiedenen Argumenten für die trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen:

$$\psi_n(x) = A_n\cdot\sin(\beta_n k_n x) + B_n\cdot\cos(\beta_n k_n x) + C_n\cdot\sinh(\alpha_n k_n x) + D_n\cdot\cosh(\alpha_n k_n x) \qquad (70).$$

5. Eigenfunktionen für Stäbe mit Zusatzmassen

Die Randbedingungen der erweiterten Differentialgleichung setzen sich aus den Funktionen

$$y(x,t) = \psi(x)\cdot v(t) \quad \text{und} \quad \varphi(x,t) = \chi(x)\cdot v(t)$$

oder ihren örtlichen Ableitungen zusammen: zeitliche Ableitungen können mit (62) und (14): $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega_n^2 \cdot y = -\frac{E\Theta}{\varrho f}\cdot\frac{M^4}{l^4}\cdot y$ durch örtliche ausgedrückt werden, und die Zeitabhängigkeit v(t), die in der Form (25 - 27) erhalten bleibt, wird weggelassen. -

Zunächst werden die benötigten Ortsfunktionen mit den von der Stablänge unabhängigen Eigenwerten M_n zusammengestellt. Zur Vereinfachung wird der Index n nicht mitgeschrieben.

$$\psi(x) = \left[A\cdot\sin\left(\beta M\tfrac{x}{l}\right) + B\cdot\cos\left(\beta M\tfrac{x}{l}\right) + C\cdot\sinh\left(\alpha M\tfrac{x}{l}\right) + D\cdot\cosh\left(\alpha M\tfrac{x}{l}\right)\right] \qquad (71a)$$

$$\psi'(x) = \frac{M}{l}\cdot\left[\beta A\cdot\cos\left(\beta M\tfrac{x}{l}\right) - \beta B\cdot\sin\left(\beta M\tfrac{x}{l}\right) + \alpha C\cdot\cosh\left(\alpha M\tfrac{x}{l}\right) + \alpha D\cdot\sinh\left(\alpha M\tfrac{x}{l}\right)\right] \qquad (71b)$$

$$\psi''(x) = \frac{M^2}{l^2}\left[-\beta^2 A\cdot\sin\left(\beta M\tfrac{x}{l}\right) - \beta^2 B\cdot\cos\left(\beta M\tfrac{x}{l}\right) + \alpha^2 C\cdot\sinh\left(\alpha M\tfrac{x}{l}\right) + \alpha^2 D\cdot\cosh\left(\alpha M\tfrac{x}{l}\right)\right] \qquad (71c)$$

Außerdem benötigt man $\chi(x)$, $\frac{\partial\chi}{\partial x}$ und $\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}$; dafür ergibt (58b):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\kappa\varrho}{G}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\kappa\varrho}{G}\cdot\left(-\frac{E\Theta}{\varrho f}\frac{M^4}{l^4}\cdot y\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\Theta}{f}\cdot\kappa\frac{E}{G}\frac{M^4}{l^4}\cdot y$$

und mit (66):

$$\frac{\partial\chi}{\partial x} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\Theta}{f l^4}\cdot U\cdot M^4\cdot\psi(x) \qquad (72)$$

$$\chi'(x) = \frac{M^2}{l^2}\left[-\beta^2 A\cdot\sin\left(\beta M\tfrac{x}{l}\right) + \frac{\Theta}{f l^2}UM^2\cdot A\cdot\sin\left(\beta M\tfrac{x}{l}\right) - \beta^2 B\cdot\cos\left(\beta M\tfrac{x}{l}\right) + \frac{\Theta}{f l^2}UM^2\cdot B\cdot\cos\left(\beta M\tfrac{x}{l}\right) + \right.$$
$$\left. + \alpha^2 C\cdot\sinh\left(\alpha M\tfrac{x}{l}\right) + \frac{\Theta}{f l^2}UM^2\cdot C\cdot\sinh\left(\alpha M\tfrac{x}{l}\right) + \alpha^2 D\cdot\cosh\left(\alpha M\tfrac{x}{l}\right) + \frac{\Theta}{f l^2}UM^2\cdot D\cdot\cosh\left(\alpha M\tfrac{x}{l}\right)\right] = \qquad (72b)$$

$$\chi'(x) = \frac{M^2}{l^2}\left[-A\left(\beta^2 - \frac{\Theta}{f l^2}UM^2\right)\cdot\sin\left(\beta M\tfrac{x}{l}\right) - B\left(\beta^2 - \frac{\Theta}{f l^2}UM^2\right)\cdot\cos\left(\beta M\tfrac{x}{l}\right) + C\cdot\left(\alpha^2 + \frac{\Theta}{f l^2}UM^2\right)\cdot\sinh\left(\alpha M\tfrac{x}{l}\right) + D\left(\alpha^2 + \frac{\Theta}{f l^2}UM^2\right)\cdot\cosh\left(\alpha M\tfrac{x}{l}\right)\right]$$

$$\chi''(x) = \frac{M^3}{l^3}\left[-A\beta\left(\beta^2 - \frac{\Theta}{f l^2}UM^2\right)\cdot\cos\left(\beta M\tfrac{x}{l}\right) + B\beta\left(\beta^2 - \frac{\Theta}{f l^2}UM^2\right)\cdot\sin\left(\beta M\tfrac{x}{l}\right) + C\alpha\left(\alpha^2 + \frac{\Theta}{f l^2}UM^2\right)\cdot\cosh\left(\alpha M\tfrac{x}{l}\right) + D\alpha\left(\alpha^2 + \frac{\Theta}{f l^2}UM^2\right)\cdot\sinh\left(\alpha M\tfrac{x}{l}\right)\right]$$
(72c).

Durch Integration von (72b) bekommt man die Ortsfunktion:

$$\chi^{(x)} = \frac{M}{l}\left[+\frac{A}{\beta}\left(\beta^2-\frac{\Theta}{fl^2}UM^2\right)\cos\left(\beta M\frac{x}{l}\right) - \frac{B}{\beta}\left(\beta^2-\frac{\Theta}{fl^2}UM^2\right)\cdot\sin\left(\beta M\frac{x}{l}\right) + \frac{C}{\alpha}\left(\alpha^2+\frac{\Theta}{fl^2}UM^2\right)\cdot\underline{\cosh}\left(\alpha M\frac{x}{l}\right) + \frac{D}{\alpha}\left(\alpha^2+\frac{\Theta}{fl^2}UM^2\right)\cdot\underline{\sinh}\left(\alpha M\frac{x}{l}\right)\right]$$

(72a).

Schließlich tritt noch die Kombination $\frac{\partial y}{\partial x} - \varphi$ auf:

$$\psi'(x) - \chi(x) = \frac{M}{l}\left[\frac{A}{\beta}\left(\beta^2-\beta^2+\frac{\Theta}{fl^2}UM^2\right)\cos\left(\beta M\frac{x}{l}\right) - \frac{B}{\beta}\left(\beta^2-\beta^2+\frac{\Theta}{fl^2}UM^2\right)\sin\left(\beta M\frac{x}{l}\right) - \frac{C}{\alpha}\left(-\alpha^2+\alpha^2+\frac{\Theta}{fl^2}UM^2\right)\cdot\underline{\cosh}\left(\alpha M\frac{x}{l}\right) - \frac{D}{\alpha}\left(-\alpha^2+\alpha^2+\frac{\Theta}{fl^2}UM^2\right)\cdot\underline{\sinh}\left(\alpha M\frac{x}{l}\right)\right]$$

$$\psi'(x) - \chi(x) = \frac{M}{l}\frac{\Theta}{fl^2}UM^2\left[\frac{A}{\beta}\cdot\cos\left(\beta M\frac{x}{l}\right) - \frac{B}{\beta}\cdot\sin\left(\beta M\frac{x}{l}\right) - \frac{C}{\alpha}\cdot\underline{\cosh}\left(\alpha M\frac{x}{l}\right) - \frac{D}{\alpha}\cdot\underline{\sinh}\left(\alpha M\frac{x}{l}\right)\right] \qquad (73)$$

6. Eigenwerte für Stäbe mit Zusatzmassen

Da die Eigenwertgleichungen recht unübersichtlich werden und bei den zahlreichen Umformungen leicht Rechenfehler auftreten können, sind alle Zwischenschritte der Rechnung auch hier mit angegeben. -

Die beiden Randbedingungen für Drehmoment und Scherkraft am Stabanfang x = 0 gehen aus einer sinngemäßen Übertragung von (44, 45) hervor, doch wird ihre Reihenfolge hier vertauscht; die Eigenwerte werden zur Kennzeichnung der Zusatzmasse wieder M' genannt. -

Scherkraft der Zusatzmasse am Stabanfang nach (41) und (14):

$$Q_z = \frac{gfl}{2}(P_R-1)\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)_{x=0} = \frac{gfl}{2}(P_R-1)\cdot\left(-\frac{E\Theta}{gf}\frac{M'^4}{l^4}\right)\cdot(y)_{x=0}$$

$$Q_z = -E\Theta\frac{M'^3(P_R-1)}{l^3}\cdot\frac{M'}{2}\cdot(y)_{x=0} \qquad (74)$$

Scherkraft unter Berücksichtigung der Verformung der Stabelemente (55): $Q = \frac{fG}{\kappa}\left(\frac{\partial y}{\partial x} - \varphi\right)$

Die Gleichheit beider Scherkräfte bei x = 0 ergibt die erste Bedingung:

I. $$Q_z(x=0) = Q(x=0)$$

$$-E\Theta\frac{M'^3(P_R-1)}{l^3}\cdot\frac{M'}{2}\cdot(y)_{x=0} = \frac{fG}{\kappa}\left(\frac{\partial y}{\partial x} - \varphi\right)_{x=0} \qquad (75)$$

$$\psi'(0) - \chi(0) + \frac{\Theta}{f}\cdot\kappa\frac{E}{G}\frac{M'}{2}(P_R-1)\frac{M'^3}{l^3}\cdot\psi(0) = 0$$

Nach (45a) wird die Konstante $a = \frac{P_R-1}{2}\cdot M'$ eingesetzt, ferner nach (66) $\kappa\frac{E}{G} = U$:

$$\psi'(0) - \chi(0) + \frac{\Theta}{f}\cdot U\cdot a\cdot\frac{M'^3}{l^3}\cdot\psi(0) = 0 \qquad (75a)$$

Dann folgt mit (73) und (71a) die erste Bedingung:

$$\frac{M'}{l}\cdot\frac{\Theta}{f l^2}\cdot U\cdot M'^2\left[\frac{A}{\beta} - \frac{C}{a}\right] + \frac{\Theta}{f}\cdot U\cdot a\frac{M'^3}{l^3}\left[B + D\right] = 0$$

$$\frac{A}{\beta} - \frac{C}{a} + a\cdot(B+D) = 0 \qquad (76)$$

$$C = \frac{a}{\beta}A + a\cdot aB + a\cdot aD \qquad (76a)$$

Das Drehmoment D der Normalspannungen hat nach Integration von (57a) die Form:

$$D = -E\Theta\frac{\partial\varphi}{\partial x} \qquad (77)$$

Die rotatorische Trägheit D_{rot} des Stabelements wird beim Übergang zum Stabanfangsquerschnitt Null, aber es wirkt die rotatorische Trägheit D_z der Zusatzmasse entsprechend (42 - 44a):

$$D_z = \Theta_z\cdot\ddot{\varphi} = \Theta_z\cdot(-\omega^2\cdot\varphi) = \Theta_z\left(-\frac{E\Theta}{gf}\cdot\frac{M'^4}{l^4}\cdot\varphi\right)$$

$$D_z = -E\Theta\cdot\frac{\Theta_z}{gf}\cdot\frac{M'^3}{l^3}\cdot\frac{M'}{l}\cdot\varphi = -E\Theta\cdot b\cdot\frac{M'}{l}\cdot\varphi \qquad (78)$$

Die zweite Randbedingung ergibt sich wie früher daraus, daß am Stabanfang kein resultierendes Drehmoment vorhanden ist:

II. $$D + D_z = 0$$

$$-E\Theta\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{x=0} + b\cdot\frac{M'}{l}\cdot(\varphi)_{x=0}\right] = 0 \qquad (79)$$

$$\chi'(0) + b\cdot\frac{M'}{l}\cdot\chi(0) = 0 \qquad (79a)$$

Die zweite Bedingung nimmt mit (72a,b) die Form an:

$$\frac{M'^2}{l^2}\left[-B\left(\beta^2 - \frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right) + D\left(a^2 + \frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)\right] + b\cdot\frac{M'}{l}\cdot\frac{M'}{l}\left[\frac{A}{\beta}\left(\beta^2 - \frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right) + \frac{C}{a}\left(a^2 + \frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)\right] = 0$$

$$-B\left(\beta^2 - \frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right) + D\left(a^2 + \frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right) + b\cdot\frac{A}{\beta}\left(\beta^2 - \frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right) + b\cdot\frac{C}{a}\left(a^2 + \frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right) = 0$$

$$C = \frac{\frac{a}{b}B\left(\beta^2 - \frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right) - \frac{a}{b}D\left(a^2 + \frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right) - \frac{a}{b}\frac{b}{\beta}A\left(\beta^2 - \frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)}{\left(a^2 + \frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)} \qquad (79b)$$

Gleichgesetzt mit (76a):

$$\alpha\left(\frac{A}{\beta}+aB+aD\right) = \alpha\cdot\frac{\frac{B}{b}\left(\beta^2-\frac{\Theta}{f_{12}}UM^2\right)-\frac{D}{b}\left(a^2+\frac{\Theta}{f_{12}}UM^2\right)-\frac{A}{\beta}\left(\beta^2-\frac{\Theta}{f_{12}}UM^2\right)}{\left(a^2+\frac{\Theta}{f_{12}}UM^2\right)}$$

$$\frac{A}{\beta}\left(a^2+\frac{\Theta}{f_{12}}UM^2\right)+\frac{A}{\beta}\left(\beta^2-\frac{\Theta}{f_{12}}UM^2\right)+a\cdot B\left(a^2+\frac{\Theta}{f_{12}}UM^2\right)-\frac{B}{b}\left(\beta^2-\frac{\Theta}{f_{12}}UM^2\right)+a\cdot D\left(a^2+\frac{\Theta}{f_{12}}UM^2\right)+\frac{D}{b}\left(a^2+\frac{\Theta}{f_{12}}UM^2\right) = 0$$

$$D\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(a^2+\frac{\Theta}{f_{12}}UM^2\right) = \frac{D}{b}(ab+1)\left(a^2+\frac{\Theta}{f_{12}}UM^2\right) = -\frac{A}{\beta}\frac{b}{b}\left(a^2+\beta^2\right)+\frac{B}{b}\left[\left(\beta^2-\frac{\Theta}{f_{12}}UM^2\right)-ab\cdot\left(a^2+\frac{\Theta}{f_{12}}UM^2\right)\right]$$

$$D = \frac{-A\cdot b\cdot\left(a^2+\beta^2\right)+B\cdot\beta\left[\left(\beta^2-\frac{\Theta}{f_{12}}UM^2\right)-ab\cdot\left(a^2+\frac{\Theta}{f_{12}}UM^2\right)\right]}{(1+ab)\cdot\beta\cdot\left(a^2+\frac{\Theta}{f_{12}}UM^2\right)}$$

Die Konstante C bekommt man aus (76a):

$$C = \frac{\alpha}{\beta}A+a\cdot\alpha B+a\cdot\alpha D$$

$$C = \frac{A\cdot(1+ab)\cdot\alpha\left(a^2+\frac{\Theta}{f_{12}}UM^2\right)+B\cdot a(1+ab)\cdot\alpha\beta\left(a^2+\frac{\Theta}{f_{12}}UM^2\right)-A\cdot ab\cdot\alpha\left(a^2+\beta^2\right)+B\cdot a\cdot\alpha\beta\left(\beta^2-\frac{\Theta}{f_{12}}UM^2\right)-B\cdot a^2b\,\alpha\beta\left(a^2+\frac{\Theta}{f_{12}}UM^2\right)}{(1+ab)\cdot\beta\cdot\left(a^2+\frac{\Theta}{f_{12}}UM^2\right)}$$

$$C = \frac{A\alpha\cdot\left[\left(a^2+\frac{\Theta}{f_{12}}UM^2\right)-ab\left(\beta^2-\frac{\Theta}{f_{12}}UM^2\right)\right]+B\cdot a\cdot\alpha\beta\left(a^2+\beta^2\right)}{(1+ab)\cdot\beta\cdot\left(a^2+\frac{\Theta}{f_{12}}UM^2\right)}$$

So können die Konstanten A, B, C, D mit einheitlichem Nenner N geschrieben werden:

$$N = (1+ab)\cdot\beta\cdot\left(a^2+\frac{\Theta}{f_{12}}UM^2\right) \qquad (80)$$

$$A = \frac{A}{N}(1+ab)\cdot\beta\cdot\left(a^2+\frac{\Theta}{f_{12}}UM^2\right) \qquad (80a)$$

$$B = \frac{B}{N}(1+ab)\cdot\beta\cdot\left(a^2+\frac{\Theta}{f_{12}}UM^2\right) \qquad (80b)$$

$$C = \frac{A}{N}\cdot\alpha\left[\left(a^2+\frac{\Theta}{f_{12}}UM^2\right)-ab\cdot\left(\beta^2-\frac{\Theta}{f_{12}}UM^2\right)\right]+\frac{B}{N}\cdot a\cdot\alpha\beta\left(a^2+\beta^2\right) \qquad (80c)$$

$$D = -\frac{A}{N}\cdot b\cdot\left(a^2+\beta^2\right)+\frac{B}{N}\beta\cdot\left[\left(\beta^2-\frac{\Theta}{f_{12}}UM^2\right)-ab\cdot\left(a^2+\frac{\Theta}{f_{12}}UM^2\right)\right] \qquad (80d)$$

Diese Zusammenhänge sind für alle Schwingungsordnungen n erfüllt; die noch fehlenden Randbedingungen müssen für gerade und ungerade n getrennt formuliert werden. -

Bei geraden Ordnungen befindet sich in der Stabmitte x = 1/2 ein Schwingungsbauch, und die Bedingungen (30c,d) sehen jetzt so aus:

In der Mitte keine Neigung, also $(\varphi)_{x=\frac{1}{2}} = 0$; auch eine Rechnung mit $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=\frac{1}{2}} = 0$ führt zum gleichen Ergebnis.

In der Mitte konstante Krümmung, also mit der zweiten Ableitung der tatsächlichen Neigung: $\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_{x=\frac{1}{2}} = 0$.

Wieder werden die Argumente fortgelassen; dabei haben:

trigonometrische Funktionen das Argument $\left(\left(\frac{\beta_n M_n'}{2}\right)\right)$,

hyperbolische Funktionen das Argument $\left(\left(\frac{\alpha_n M_n'}{2}\right)\right)$.

III gerade: $\chi(1/2) = 0$ (81a)

In (72a) werden A, B, C, D aus (80a-d) eingesetzt und der Nenner (80) weggelassen:

$$\frac{A}{\beta}\left(\beta^2 - \frac{\Theta}{f_1^2} UM'^2\right)\cdot\cos - \frac{B}{\beta}\left(\beta^2 - \frac{\Theta}{f_1^2} UM'^2\right)\cdot\sin + \frac{C}{\alpha}\left(\alpha^2 + \frac{\Theta}{f_1^2} UM'^2\right)\cosh + \frac{D}{\alpha}\left(\alpha^2 + \frac{\Theta}{f_1^2} UM'^2\right)\cdot\sinh = 0$$

$$A(1+ab)\left(\alpha^2+\frac{\Theta}{f_1^2}UM'^2\right)\left(\beta^2-\frac{\Theta}{f_1^2}UM'^2\right)\cos - B(1+ab)\left(\alpha^2+\frac{\Theta}{f_1^2}UM'^2\right)\left(\beta^2-\frac{\Theta}{f_1^2}UM'^2\right)\sin + A\left[\left(\alpha^2+\frac{\Theta}{f_1^2}UM'^2\right) - ab\left(\beta^2-\frac{\Theta}{f_1^2}UM'^2\right)\right]\left(\alpha^2+\frac{\Theta}{f_1^2}UM'^2\right)\cdot\cosh +$$
$$+ Ba\cdot\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(\alpha^2+\frac{\Theta}{f_1^2}UM'^2\right)\cosh - A\cdot\frac{b}{a}\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(\alpha^2+\frac{\Theta}{f_1^2}UM'^2\right)\sinh + B\cdot\frac{\beta}{a}\left[\left(\beta^2-\frac{\Theta}{f_1^2}UM'^2\right) - ab\left(\alpha^2+\frac{\Theta}{f_1^2}UM'^2\right)\right]\cdot\left(\alpha^2+\frac{\Theta}{f_1^2}UM'^2\right)\cdot\sinh = 0$$

$$A(1+ab)\cdot\alpha\cdot\left(\beta-\frac{\Theta}{f_1^2}UM'^2\right)\cos + A\alpha\left[\left(\alpha^2+\frac{\Theta}{f_1^2}UM'^2\right) - ab\left(\beta^2-\frac{\Theta}{f_1^2}UM'^2\right)\right]\cosh - A\cdot b\left(\alpha^2+\beta^2\right)\cdot\sinh =$$
$$= B(1+ab)\cdot\alpha\cdot\left(\beta^2-\frac{\Theta}{f_1^2}UM'^2\right)\sin - B\cdot a\cdot\alpha\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right)\cosh - B\beta\left[\left(\beta^2-\frac{\Theta}{f_1^2}UM'^2\right) - ab\left(\alpha^2+\frac{\Theta}{f_1^2}UM'^2\right)\right]\cdot\sinh$$

$$\frac{A}{B} = \frac{(1+ab)\cdot\alpha\left(\beta^2-\frac{\Theta}{f_1^2}UM'^2\right)\sin - a\cdot\alpha\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right)\cosh - \beta\cdot\left(\beta^2-\frac{\Theta}{f_1^2}UM'^2\right)\sinh + ab\cdot\beta\left(\alpha^2+\frac{\Theta}{f_1^2}UM'^2\right)\sinh}{(1+ab)\cdot\alpha\left(\beta^2-\frac{\Theta}{f_1^2}UM'^2\right)\cos + \alpha\left(\alpha^2+\frac{\Theta}{f_1^2}UM'^2\right)\cosh - ab\cdot\alpha\left(\beta^2-\frac{\Theta}{f_1^2}UM'^2\right)\cosh - b\cdot\left(\alpha^2+\beta^2\right)\cdot\sinh} \qquad (82a)$$

IV gerade: $\chi''(1/2) = 0$ (81b)

Mit (72c) wird verfahren wie oben angegeben:

$$-A\beta\left(\beta^2 - \frac{\Theta}{f_1^2}UM'^2\right)\cdot\cos + B\beta\left(\beta^2-\frac{\Theta}{f_1^2}UM'^2\right)\cdot\sin + C\alpha\left(\alpha^2+\frac{\Theta}{f_1^2}UM'^2\right)\cdot\cosh + D\alpha\left(\alpha^2+\frac{\Theta}{f_1^2}UM'^2\right)\cdot\sinh = 0$$

$$-A(1+ab)\beta^2\left(\beta^2-\frac{\Theta}{f_1^2}UM'^2\right)\left(\alpha^2+\frac{\Theta}{f_1^2}UM'^2\right)\cos + B(1+ab)\beta^2\left(\beta^2-\frac{\Theta}{f_1^2}UM'^2\right)\left(\alpha^2+\frac{\Theta}{f_1^2}UM'^2\right)\sin + A\alpha^2\left[\left(\alpha^2+\frac{\Theta}{f_1^2}UM'^2\right) - ab\left(\beta^2-\frac{\Theta}{f_1^2}UM'^2\right)\right]\left(\alpha^2+\frac{\Theta}{f_1^2}UM'^2\right)\cosh +$$
$$+ Ba\cdot\alpha^2\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(\alpha^2+\frac{\Theta}{f_1^2}UM'^2\right)\cosh - Ab\cdot\alpha\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(\alpha^2+\frac{\Theta}{f_1^2}UM'^2\right)\sinh + B\cdot\alpha\beta\left[\left(\beta^2-\frac{\Theta}{f_1^2}UM'^2\right) - ab\left(\alpha^2+\frac{\Theta}{f_1^2}UM'^2\right)\right]\left(\alpha^2+\frac{\Theta}{f_1^2}UM'^2\right)\cdot\sinh = 0$$

$$+A(1+ab)\cdot\beta^2\left(\beta^2-\frac{\Theta}{f_1^2}UM'^2\right)\cos - A\alpha^2\left[\left(\alpha^2+\frac{\Theta}{f_1^2}UM'^2\right) - ab\left(\beta^2-\frac{\Theta}{f_1^2}UM'^2\right)\right]\cosh + A\cdot b\cdot\alpha\left(\alpha^2+\beta^2\right)\cdot\sinh =$$
$$= B(1+ab)\cdot\beta^2\left(\beta^2-\frac{\Theta}{f_1^2}UM'^2\right)\sin + Ba\cdot\alpha^2\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right)\cosh + B\cdot\alpha\beta\left[\left(\beta^2-\frac{\Theta}{f_1^2}UM'^2\right) - ab\left(\alpha^2+\frac{\Theta}{f_1^2}UM'^2\right)\right]\sinh$$

$$\frac{A}{B} = \frac{(1+ab)\cdot\beta^2\left(\beta^2-\frac{\Theta}{f_1^2}UM'^2\right)\sin + a\cdot\alpha^2\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right)\cosh + \alpha\beta\left(\beta^2-\frac{\Theta}{f_1^2}UM'^2\right)\sinh - ab\cdot\alpha\beta\left(\alpha^2+\frac{\Theta}{f_1^2}UM'^2\right)\sinh}{(1+ab)\cdot\beta^2\left(\beta^2-\frac{\Theta}{f_1^2}UM'^2\right)\cos - \alpha^2\left(\alpha^2+\frac{\Theta}{f_1^2}UM'^2\right)\cosh + ab\cdot\alpha^2\left(\beta^2-\frac{\Theta}{f_1^2}UM'^2\right)\cosh + b\cdot\alpha\cdot\left(\alpha^2+\beta^2\right)\cdot\sinh}$$

Zähler und Nenner werden durch $(-\alpha)$ dividiert; dann stimmen jeweils die letzten drei Glieder mit (82a) überein:

$$\frac{A}{B} = \frac{-(1+ab)\frac{\beta^2}{a}\left(\beta^2-\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)\sin - a\cdot a\beta(a^2+\beta^2)\cosh - \beta\left(\beta^2-\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)\sinh + ab\beta\left(a^2+\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)\sinh}{-(1+ab)\frac{\beta^2}{a}\left(\beta^2-\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)\cos + a\left(a^2+\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)\cosh - ab\cdot a\left(\beta^2\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)\cosh - b\left(a^2+\beta^2\right)\cdot\sinh} \qquad (82b)$$

Aus der Zusammenfassung von (82a,b) folgt die Eigenwertgleichung für gerade Schwingungsordnungen:

$$-(1+ab)^2\frac{a\beta^2}{a}\left(\beta^2-\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)^2\sin\cos + (1+ab)\cdot a\left(\beta^2-\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)\cdot\sin\cdot\left[a\left(a^2+\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)\cosh - ab\cdot a\left(\beta^2-\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)\cosh - b\left(a^2+\beta^2\right)\sinh\right] +$$
$$-(1+ab)\frac{\beta^2}{a}\left(\beta^2-\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)\cdot\cos\cdot\left[-a\cdot a\beta\left(a^2+\beta^2\right)\cosh - \beta\left(\beta^2-\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)\sinh + ab\cdot\beta\left(a^2+\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)\sinh\right] + [\,][\,] =$$
$$= -(1+ab)^2\frac{a\beta^2}{a}\left(\beta^2-\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)^2\sin\cos - (1+ab)\frac{\beta^2}{a}\left(\beta^2-\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)\cdot\sin\cdot\left[a\left(a^2+\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)\cosh - ab\cdot a\left(\beta^2-\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)\cosh - b\left(a^2+\beta^2\right)\sinh\right] +$$
$$+(1+ab)a\left(\beta^2-\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)\cdot\cos\cdot\left[-a\cdot a\beta\left(a^2+\beta^2\right)\cosh - \beta\left(\beta^2-\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)\sinh + ab\cdot\beta\left(a^2+\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)\sinh\right] + [\,]\cdot[\,]$$

$$(1+ab)\left(a+\frac{\beta^2}{a}\right)\left(\beta^2-\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)\cdot\sin\cdot\left[a\left(a^2+\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)\cosh - ab\cdot a\left(\beta^2-\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)\cosh - b\cdot\left(a^2+\beta^2\right)\sinh\right] =$$
$$= (1+ab)\left(a+\frac{\beta^2}{a}\right)\left(\beta^2-\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)\cdot\cos\cdot\left[-a\cdot a\beta\left(a^2+\beta^2\right)\cosh - \beta\left(\beta^2-\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)\sinh + ab\cdot\beta\left(a^2+\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)\sinh\right]$$

$$a\cdot\left[\left(a^2+\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right) - ab\left(\beta^2-\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)\right]\cdot\sin\cosh - b\cdot\left(a^2+\beta^2\right)\cdot\sin\sinh +$$
$$+ a\cdot a\beta\left(a^2+\beta^2\right)\cdot\cos\cosh + \beta\cdot\left[\left(\beta^2-\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right) - ab\left(a^2+\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)\right]\cdot\cos\sinh = 0$$

$$a\cdot\left(1-ab\frac{\beta^2-\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2}{a^2+\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2}\right)\cdot\sin\cosh + \beta\cdot\left(\frac{\beta^2-\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2}{a^2+\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2} - ab\right)\cdot\cos\sinh +$$
$$+\frac{a^2+\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2+\beta^2-\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2}{a^2+\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2}\cdot\left(a\cdot a\beta\cdot\cos\cosh - b\cdot\sin\sinh\right) = 0$$

$$\boxed{\alpha\cdot\left(1-ab\frac{\beta^2-\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2}{a^2+\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2}\right)\cdot\tan\left(\frac{\beta M'}{2}\right) + \beta\cdot\left(\frac{\beta^2-\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2}{a^2+\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2} - ab\right)\cdot\tanh\left(\frac{\alpha M'}{2}\right) +}$$
$$\boxed{+\left(1+\frac{\beta^2-\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2}{a^2+\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2}\right)\cdot\left(a\beta\cdot a - b\cdot\tan\left(\frac{\beta M'}{2}\right)\cdot\tanh\left(\frac{\alpha M'}{2}\right)\right) = 0} \qquad (83a)$$

Das ist die Bestimmungsgleichung der Eigenwerte M'_n bei gerader Ordnung n; auch α_n und β_n sind Funktionen von M'_n.

Bei ungeraden Ordnungen befindet sich in der Stabmitte $x = 1/2$ ein Schwingungsknoten, und die Bedingungen (30e,f)

sind jetzt wie folgt zu formulieren:

In der Mitte keine Amplitude, also $(y)_{x=1/2} = 0$;

in der Mitte keine Krümmung, also keine Änderung der tatsächlichen Neigung: $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{x=1/2} = 0$.

III ungerade: $\psi(1/2) = 0$ (81c)

In (71a) werden A, B, C, D aus (80a–d) eingesetzt und der Nenner (80) weggelassen:

$$A\cdot\sin + B\cdot\cos + C\cdot\sinh + D\cdot\cosh = 0$$

$$A(1+ab)\beta\left(\alpha^2+\tfrac{\theta}{f^2}UM^2\right)\cdot\sin + B(1+ab)\beta\left(\alpha^2+\tfrac{\theta}{f^2}UM^2\right)\cdot\cos + A\alpha\left[\left(\alpha^2+\tfrac{\theta}{f^2}UM^2\right)-ab\left(\beta^2-\tfrac{\theta}{f^2}UM^2\right)\right]\cdot\sinh +$$
$$+ B\cdot a\cdot\alpha\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right)\cdot\sinh - A\cdot b\cdot\left(\alpha^2+\beta^2\right)\cdot\cosh + B\cdot\beta\left[\left(\beta^2-\tfrac{\theta}{f^2}UM^2\right)-ab\left(\alpha^2+\tfrac{\theta}{f^2}UM^2\right)\right]\cdot\cosh = 0$$

$$A(1+ab)\beta\left(\alpha^2+\tfrac{\theta}{f^2}UM^2\right)\cdot\sin + A\cdot\alpha\left[\left(\alpha^2+\tfrac{\theta}{f^2}UM^2\right)-ab\left(\beta^2-\tfrac{\theta}{f^2}UM^2\right)\right]\cdot\sinh - A\cdot b\cdot\left(\alpha^2+\beta^2\right)\cdot\cosh =$$
$$= -B(1+ab)\cdot\beta\left(\alpha^2+\tfrac{\theta}{f^2}UM^2\right)\cdot\cos - B\cdot a\cdot\alpha\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right)\cdot\sinh - B\cdot\beta\left[\left(\beta^2-\tfrac{\theta}{f^2}UM^2\right)-ab\left(\alpha^2+\tfrac{\theta}{f^2}UM^2\right)\right]\cdot\cosh$$

$$\frac{A}{B} = \frac{-(1+ab)\cdot\beta\left(\alpha^2+\tfrac{\theta}{f^2}UM^2\right)\cdot\cos - a\cdot\alpha\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right)\cdot\sinh - \beta\left(\beta^2-\tfrac{\theta}{f^2}UM^2\right)\cdot\cosh + ab\cdot\beta\left(\alpha^2+\tfrac{\theta}{f^2}UM^2\right)\cdot\cosh}{(1+ab)\cdot\beta\left(\alpha^2+\tfrac{\theta}{f^2}UM^2\right)\cdot\sin + \alpha\left(\alpha^2+\tfrac{\theta}{f^2}UM^2\right)\cdot\sinh - ab\cdot\alpha\left(\beta^2-\tfrac{\theta}{f^2}UM^2\right)\cdot\sinh - b\cdot\left(\alpha^2+\beta^2\right)\cdot\cosh} \quad (82c)$$

IV ungerade: $\varphi'(1/2) = 0$ (81d)

Mit (72b) wird verfahren wie oben angegeben:

$$-A\left(\beta^2-\tfrac{\theta}{f^2}UM^2\right)\cdot\sin - B\left(\beta^2-\tfrac{\theta}{f^2}UM^2\right)\cdot\cos + C\left(\alpha^2+\tfrac{\theta}{f^2}UM^2\right)\cdot\sinh + D\left(\alpha^2+\tfrac{\theta}{f^2}UM^2\right)\cdot\cosh = 0$$

$$-A(1+ab)\beta\left(\alpha^2+\tfrac{\theta}{f^2}UM^2\right)\left(\beta^2-\tfrac{\theta}{f^2}UM^2\right)\sin - B(1+ab)\beta\left(\alpha^2+\tfrac{\theta}{f^2}UM^2\right)\left(\beta^2-\tfrac{\theta}{f^2}UM^2\right)\cos + A\alpha\left[\left(\alpha^2+\tfrac{\theta}{f^2}UM^2\right)-ab\left(\beta^2-\tfrac{\theta}{f^2}UM^2\right)\right]\left(\alpha^2+\tfrac{\theta}{f^2}UM^2\right)\sinh +$$
$$+ Ba\cdot\alpha\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(\alpha^2+\tfrac{\theta}{f^2}UM^2\right)\sinh - Ab\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(\alpha^2+\tfrac{\theta}{f^2}UM^2\right)\cosh + B\beta\left[\left(\beta^2-\tfrac{\theta}{f^2}UM^2\right)-ab\left(\alpha^2+\tfrac{\theta}{f^2}UM^2\right)\right]\left(\alpha^2+\tfrac{\theta}{f^2}UM^2\right)\cosh = 0$$

$$-A(1+ab)\beta\left(\beta^2-\tfrac{\theta}{f^2}UM^2\right)\cdot\sin + A\alpha\left[\left(\alpha^2+\tfrac{\theta}{f^2}UM^2\right)-ab\left(\beta^2-\tfrac{\theta}{f^2}UM^2\right)\right]\cdot\sinh - Ab\left(\alpha^2+\beta^2\right)\cdot\cosh =$$
$$= +B(1+ab)\beta\left(\beta^2-\tfrac{\theta}{f^2}UM^2\right)\cdot\cos - Ba\cdot\alpha\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right)\cdot\sinh - B\beta\left[\left(\beta^2-\tfrac{\theta}{f^2}UM^2\right)-ab\left(\alpha^2+\tfrac{\theta}{f^2}UM^2\right)\right]\cdot\cosh$$

$$\frac{A}{B} = \frac{(1+ab)\beta\left(\beta^2-\tfrac{\theta}{f^2}UM^2\right)\cdot\cos - a\cdot\alpha\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right)\cdot\sinh - \beta\left(\beta^2-\tfrac{\theta}{f^2}UM^2\right)\cdot\cosh + ab\cdot\beta\left(\alpha^2+\tfrac{\theta}{f^2}UM^2\right)\cdot\cosh}{-(1+ab)\beta\left(\beta^2-\tfrac{\theta}{f^2}UM^2\right)\cdot\sin + \alpha\left(\alpha^2+\tfrac{\theta}{f^2}UM^2\right)\cdot\sinh - ab\cdot\alpha\left(\beta^2-\tfrac{\theta}{f^2}UM^2\right)\cdot\sinh - b\left(\alpha^2+\beta^2\right)\cdot\cosh} \quad (82d)$$

Die letzten drei Glieder im Zähler und Nenner stimmen bei (82c,d) ebenfalls überein, und aus der Zusammenfassung

beider Beziehungen folgt die Eigenwertgleichung für ungerade Schwingungsordnungen:

$$+(1+ab)^2\beta^2\left(\alpha^2+\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)\left(\beta^2-\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)\sin\sin-(1+ab)\beta\left(\beta^2-\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)\sin\cdot\left[-a\cdot\alpha\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right)\underline{\sinh}-\beta\left(\beta^2-\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)\underline{\cosh}+ab\cdot\beta\left(\alpha^2+\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)\underline{\cosh}\right]+$$
$$-(1+ab)\beta\left(\alpha^2+\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)\cos\cdot\left[a\left(\alpha^2+\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)\underline{\sinh}-ab\cdot a\left(\beta^2-\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)\underline{\sinh}-b\left(\alpha^2+\beta^2\right)\underline{\cosh}\right]+[\ldots]\cdot[\ldots]\;=$$

$$=(1+ab)^2\beta^2\left(\alpha^2+\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)\left(\beta^2-\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)\sin\cos+(1+ab)\beta\left(\alpha^2+\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)\sin\cdot\left[-a\cdot\alpha\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right)\underline{\sinh}-\beta\left(\beta^2-\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)\underline{\cosh}+ab\cdot\beta\left(\alpha^2+\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)\underline{\cosh}\right]+$$
$$+(1+ab)\beta\left(\beta^2-\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)\cos\cdot\left[a\left(\alpha^2+\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)\underline{\sinh}-ab\cdot a\left(\beta^2-\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)\underline{\sinh}-b\left(\alpha^2+\beta^2\right)\underline{\cosh}\right]+[\ldots]\cdot[\ldots]$$

$$(1+ab)\beta\left[\left(\alpha^2+\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)+\left(\beta^2-\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)\right]\cdot\sin\cdot\left[-a\cdot\alpha\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right)\underline{\sinh}-\beta\left(\beta^2-\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)\underline{\cosh}+ab\cdot\beta\left(\alpha^2+\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)\underline{\cosh}\right]+$$
$$+(1+ab)\beta\left[\left(\alpha^2+\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)+\left(\beta^2-\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)\right]\cdot\cos\cdot\left[a\left(\alpha^2+\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)\underline{\sinh}-ab\cdot a\left(\beta^2-\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)\underline{\sinh}-b\left(\alpha^2+\beta^2\right)\underline{\cosh}\right]\;=\;0$$

$$-a\cdot\alpha\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right)\sin\underline{\sinh}-\beta\cdot\left[\left(\beta^2-\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)-ab\left(\alpha^2+\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)\right]\sin\underline{\cosh}+$$
$$+\alpha\cdot\left[\left(\alpha^2+\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)-ab\left(\beta^2-\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2\right)\right]\cos\underline{\sinh}-b\cdot\left(\alpha^2+\beta^2\right)\cos\underline{\cosh}\;=\;0$$

$$+\beta\left(1-ab\frac{\alpha^2+\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2}{\beta^2-\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2}\right)\cdot\sin\underline{\cosh}-\alpha\left(\frac{\alpha^2+\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2}{\beta^2-\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2}-ab\right)\cdot\cos\underline{\sinh}+$$
$$+\frac{\alpha^2+\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2+\beta^2-\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2}{\beta^2-\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2}\cdot\left(+a\cdot\alpha\beta\cdot\sin\underline{\sinh}+b\cdot\cos\underline{\cosh}\right)\;=\;0$$

$$\boxed{\beta\cdot\left(1-ab\frac{\alpha^2+\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2}{\beta^2-\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2}\right)\cdot\tan\left(\frac{\beta M'}{2}\right)-\alpha\cdot\left(\frac{\alpha^2+\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2}{\beta^2-\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2}-ab\right)\cdot\underline{\tanh}\left(\frac{\alpha M'}{2}\right)+\left(\frac{\alpha^2+\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2}{\beta^2-\frac{\Theta}{fl^2}UM'^2}+1\right)\cdot\left(\alpha\beta\cdot a\cdot\tan\left(\frac{\beta M'}{2}\right)\cdot\underline{\tanh}\left(\frac{\alpha M'}{2}\right)+b\right)\;=\;0}\qquad(83b)$$

Das ist die Bestimmungsgleichung der Eigenwerte M'_n bei ungerader Ordnung n; für Stäbe ohne Zusatzmassen gilt:

$$a\;=\;b\;=\;0\;.$$

7. Berechnung der Eigenwerte

Folgende Größen sind zur Berechnung der Eigenwerte einzusetzen:

(45a) $\qquad a\;=\;\frac{P_k-1}{2}\cdot M'_n$

(44a) $\qquad b\;=\;\frac{P_k-1}{24\,l^2}\cdot\left[l_z^2+3\left(R^2+r^2\right)\right]\cdot M'^3_n$

Bei Stäben mit Kreisquerschnitt ist nach (16):

$$\frac{\Theta}{fl^2} = \frac{\frac{\pi r^4}{4}}{\pi r^2 l^2} = \frac{r^2}{4l^2} \quad \text{und} \quad \frac{\theta}{2fl^2} = \frac{r^2}{8l^2}$$

Dann bekommt man mit (68a,b) und jeweils den positiven Wurzeln von (69):

$$\alpha_n = \sqrt{\sqrt{\left(\frac{r^2}{8l^2}\right)^2 \cdot (1-U)^2 \cdot M_n'^4 + 1} - \frac{r^2}{8l^2} \cdot (1+U) \cdot M_n'^2} \qquad (84a)$$

$$\beta_n = \sqrt{\sqrt{\left(\frac{r^2}{8l^2}\right)^2 \cdot (1-U)^2 \cdot M_n'^4 + 1} + \frac{r^2}{8l^2} \cdot (1+U) \cdot M_n'^2} \qquad (84b)$$

$$\alpha^2 + \frac{\Theta}{fl^2} U M'^2 = \sqrt{\left(\frac{\Theta}{2fl^2}\right)^2 \cdot (1-U)^2 \cdot M'^4 + 1} - \frac{\Theta}{2fl^2}(1+U) \cdot M'^2 + \frac{\Theta}{2fl^2} \cdot 2U \cdot M'^2$$

$$\beta^2 - \frac{\Theta}{fl^2} U M'^2 = \sqrt{\left(\frac{\Theta}{2fl^2}\right)^2 \cdot (1-U)^2 \cdot M'^4 + 1} + \frac{\Theta}{2fl^2}(1+U) \cdot M'^2 - \frac{\Theta}{2fl^2} \cdot 2U \cdot M'^2$$

$$\alpha_n^2 + \frac{\Theta}{fl^2} U M_n'^2 = \sqrt{\left(\frac{r^2}{8l^2}\right)^2 \cdot (1-U)^2 \cdot M_n'^4 + 1} - \frac{r^2}{8l^2} \cdot (1-U) \cdot M_n'^2 \qquad (84c)$$

$$\beta_n^2 - \frac{\Theta}{fl^2} U M_n'^2 = \sqrt{\left(\frac{r^2}{8l^2}\right)^2 \cdot (1-U)^2 \cdot M_n'^4 + 1} + \frac{r^2}{8l^2} \cdot (1-U) \cdot M_n'^2 \qquad (84d)$$

Die Konstante U hängt mit κ – wie später gezeigt wird – nur von der Poissonkonstanten m ab (66):

$$U = 2\kappa \cdot (1 + m) .$$

Die Berechnung der Eigenwerte M_n' aus den komplizierten Gleichungen (83a,b) kann nur mit einer elektronischen Rechenanlage erfolgen. Zu diesem Zweck wurde ein ALGOL-Programm entwickelt, das die Eigenwerte für Stäbe von der Länge l und dem Radius r mit Zusatzmassen an den Enden (Konstanten a und b) bis zur beliebigen Schwingungsordnung n liefert. Dabei werden die ersten (n + 1) Nullstellen von (83a,b) als Funktion von M_n' durch Intervallverfeinerung aufgesucht, indem jeweils schrittweise zwei Funktionswerte im Abstand des Intervalls berechnet werden, und sobald der

eine Wert negativ, der andere positiv ist, die Schrittweite um eine Zehnerpotenz bis schließlich auf 10^{-5} verringert wird. -
Ein Rechenprogramm für den Stab PMMA 18 bis n = 8 ist als Beispiel angefügt.

8. Grenzwellenlänge

Aus Gleichung (84a) erkennt man, daß α_n nicht imaginär werden kann, solange gilt:

$$\sqrt{\left(\frac{r^2}{8l^2}\right)^2\cdot(1-U)^2\cdot M_n'^4 + 1} - \frac{r^2}{8l^2}(1+U)\cdot M_n'^2 \geq 0 \qquad (85)$$

Oberhalb dieser Grenze gehen die hyperbolischen Funktionen mit imaginärem Argument in trigonometrische über. Zusatzmassen bewirken nur eine Verschiebung der Eigenwerte. -

Nach GOENS[15] bedeutet der Übergang zu trigonometrischen Funktionen einen Wechsel im Schwingungstyp. Er berechnet aus (85) eine Grenzfrequenz und gibt an, die zugehörige Wellenlänge habe die gleiche Größe wie die Querdimensionen des Stabes. -

Die obere Grenze der Eigenwerte M_n' ist nach (85):

$$\left(\frac{r^2}{8l^2}\right)^2\cdot(1-U)^2\cdot M_n'^4 + 1 \geq \left(\frac{r^2}{8l^2}\right)^2\cdot(1+U)^2\cdot M_n'^4$$

$$\left(\frac{r^2}{8l^2}\right)^2\cdot\left[(1+U)^2-(1-U)^2\right]\cdot M_n'^4 \leq 1$$

$$\left(\frac{r^2}{8l^2}\right)^2\cdot 4U\cdot M_n'^4 \leq 1$$

$$M_n' \leq \frac{2l}{r\cdot\sqrt[4]{U}} \qquad (85a)$$

Im Bereich der Poissonkonstanten $0.3 \leq m \leq 0.4$ kann man angenähert setzen: $\sqrt[4]{U} \approx 4/3$. Damit darf M_n' nicht größer

werden als: $M_n' \lesssim \frac{3}{2}\frac{l}{r}$ (85b)

Mit Hilfe dieser Relation läßt sich angeben, wie groß die Biegewellenlänge λ im Verhältnis zum Stabradius bezw. Stabdurchmesser mindestens sein muß. Da die Eigenwerte M_n bei kurzen, dicken Stäben niedriger sind als die nach der einfachen Theorie berechneten, wurden sie für einen dicken Stab mit abnehmender Länge aus (83a) ermittelt. Der kleinste erreichbare Wert betrug etwa $M_0 = 3.30$. Die zugehörige Wellenlänge ist nach (38): $\lambda_0 \approx 4/3\, l$. So ergibt sich aus (85b):

$$3.30 \lesssim \frac{3}{2}\frac{l}{r} \approx \frac{3}{2}\cdot\frac{3/4\,\lambda_0}{r}$$

$$\lambda_0 \gtrsim 3.30\cdot\frac{8}{9}r = 2.93r$$

oder angenähert: $\underline{\lambda_0 \gtrsim 3r}$ (86)

Die Biegewellenlänge kann hiernach nicht kleiner als etwa der dreifache Stabradius sein. - KNESER[34] ist der Meinung, daß sich Longitudinal-, Torsions- und Biegeschwingungen bis etwa $d/\lambda \approx 1$ getrennt anregen ließen; Messungen hat er bis $d/\lambda \approx 0.7$ durchgeführt. - Nach (86) wäre die Grenze: $d/\lambda \approx 0.68$.-

Der kürzeste Stab, in dem sich die Grundschwingung noch ausbildet, sollte folgendes Verhältnis von Durchmesser und Länge haben: $l \gtrsim \frac{3.30}{3} d$, also $\underline{l \gtrsim 1.1\, d}$ (86a)

Berechnungen nach (83a) ergaben Grenzen von:

$l \approx 1.13\, d$ für $m = 0.30$

$l \approx 1.15\, d$ für $m = 0.40$

$l \approx 1.17\, d$ für $m = 0.50$.

IV. Bestimmung der Konstanten κ

In den Eigenwertgleichungen tritt die Konstante κ, die der ungleichmäßigen Verformung der einzelnen Elemente eines Querschnitts im gebogenen Stab als Folge der Schubspannungen Rechnung trägt, in der Form (66) auf:

$$U = 2\kappa\cdot(1 + m) .$$

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, wie sich κ, und damit auch U über eine Berechnung der Schubspannungskomponenten am Stabquerschnitt als Funktion lediglich der Poissonkonstanten m darstellen lassen, so daß dann eine Zwei-Konstanten-Theorie der Biegeschwingung isotroper Stäbe vorliegt. - Außerdem werden in der Literatur angegebene Werte der Konstanten κ sowie der Schubspannungskomponenten diskutiert. -

1. Schubspannungskomponenten

Das Volumenelement eines elastisch beanspruchten Körpers befindet sich im Gleichgewicht gegenüber Translation, wenn der Resultantensatz, gegenüber Rotation, wenn der Momentensatz gilt. -

Der erste Index gibt jeweils an, zu welcher Normalspannungskomponente die Spannung gehört, der zweite, in welcher Richtung sie wirkt:

Resultantensatz:

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} = 0 \qquad (87a)$$

$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z} = 0 \qquad (87b)$$

$$\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \qquad (87c)$$

Momentensatz:

$$\tau_{ik} = \tau_{ki} \qquad (87d)$$

Der Ursprung des Koordinatensystems liege jetzt so im Stab, daß die x-Achse bei x = 0 Tangente an die in der (x,y)-Ebene gebogene Stabachse ist. Der kreisförmige Stabquerschnitt liegt dann in der (y,z)-Ebene. -

Infolge der Biegung wirken auf den Stabquerschnitt oberhalb der neutralen Schicht y = 0 positive, darunter negative Normalspannungen σ_{xx}, die dem Abstand von der neutralen Schicht nach (2, 3) proportional sind:

$$D = \frac{E\Theta}{r_{xx}} = \frac{\varepsilon}{y}\cdot E\Theta = \frac{\sigma}{y}\cdot\Theta \quad \text{oder} \quad \sigma_{xx} = \frac{D}{\Theta}y \qquad (88)$$

In den beiden anderen Richtungen wirken keine Normalspannungen:

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0 \qquad (88a)$$

Die Normalspannung σ_{xx} ruft in y- und z-Richtung die Schubspannungen τ_{xy} und τ_{xz} hervor; dementsprechend sind nach (87d) auch τ_{yx} und τ_{zx} nicht Null. -

Man setzt:

$$\tau_{yz} = \tau_{xy} = 0 \qquad (88b)$$

weil in y- und z-Richtung keine Normalspannungen wirken, die entsprechende Schubspannungen hervorrufen könnten. Das ist gleichbedeutend damit, daß die Schubspannungskomponenten τ_{xy} und τ_{xz} nach (87b,c) unabhängig von x sind. - Damit bleibt vom Resultantensatz bei Beachtung des Momentensatzes übrig:

$$(87a) \quad \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$(87b) \quad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} = 0$$

$$(87c) \quad \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} = 0$$

Die Spannungs-Dehnungs-Beziehungen stellen mit den folgenden Dehnungen ε_{ii} und Winkeländerungen ε_{ik} eine Verbindung her, wenn man die Laméschen Konstanten Λ und G (oder μ) durch

E und m ersetzt: $\sigma_{ii} = 2G\varepsilon_{ii} + \Lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})$

$$\sigma_{ii} = \frac{E}{1+m}\varepsilon_{ii} + \frac{mE}{(1+m)(1-2m)}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \qquad (89)$$

$$\sigma_{ik} = \tau_{ik} = 2G\cdot\varepsilon_{ik} = \frac{E}{1+m}\varepsilon_{ik} \qquad (89a)$$

Dann bekommt man für die Normalspannung $\sigma_{xx} = \frac{D}{\Theta}y$:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1+m}\varepsilon_{xx} + \frac{mE}{(1+m)(1-2m)}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) = \frac{D}{\Theta}y$$

$$(1-2m)E\varepsilon_{xx} + mE\varepsilon_{xx} + mE\varepsilon_{yy} + mE\varepsilon_{zz} = (1+m)(1-2m)\frac{D}{\Theta}y$$

und mit den Normalspannungen $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0$ erhält man:

$$\begin{aligned} (1-m)\cdot\varepsilon_{xx} + m\varepsilon_{yy} + m\varepsilon_{zz} &= (1+m)(1-2m)\frac{D}{E\Theta}y \\ m\varepsilon_{xx} + (1-m)\varepsilon_{yy} + m\varepsilon_{zz} &= 0 \\ m\varepsilon_{xx} + m\varepsilon_{yy} + (1-m)\varepsilon_{zz} &= 0 \end{aligned} \qquad (89b)$$

Daraus ergeben sich die drei Dehnungen:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{D}{E\Theta}y \;; \qquad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -m\varepsilon_{xx} = -\frac{mD}{E\Theta}y \qquad (89c)$$

Sie sind von x abhängig nach (7): $\frac{\partial D}{\partial x} = Q$.

Die Winkeländerungen ε_{ik} hängen mit den Schubspannungskomponenten wegen (88b, 89a) zusammen:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1+m}{E}\tau_{xy} \;; \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1+m}{E}\tau_{xz} \;; \quad \varepsilon_{yz} = 0 \qquad (89d)$$

Dabei sind τ_{xy} und τ_{xz} unabhängig von x. -

Damit die 6 Komponenten ε_{ii} und ε_{ik} einen physikalisch möglichen Deformationszustand beschreiben, müssen die folgenden Kompatibilitätsbedingungen erfüllt sein, die sich daraus ergeben, daß die räumlichen Ableitungen des Verschiebungsvektors $\delta = \delta(\xi,\eta,\zeta)$ in ihrer Reihenfolge vertauschbar sind:

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial^2\varepsilon_{xy}}{\partial x\,\partial y} &= \frac{\partial^2\varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = 0 \\ 2\frac{\partial^2\varepsilon_{xz}}{\partial x\,\partial z} &= \frac{\partial^2\varepsilon_{xx}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{zz}}{\partial x^2} = 0 \\ 2\frac{\partial^2\varepsilon_{yz}}{\partial y\,\partial z} &= \frac{\partial^2\varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{zz}}{\partial y^2} = 0 \end{aligned} \qquad (89e)$$

Hierbei sind alle Summanden einzeln Null, und zwar: $\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\varepsilon_{ii})$ weil $\varepsilon_{ii} \sim y^1$; wegen (87b,c): $\frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon_{xy}) = \frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon_{xz}) = 0$; nach (88b): $\varepsilon_{yz} = 0$; schließlich wegen (89c): $\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2}$ und damit auch die letzten beiden. -

Das zweite Tripel der Kompatibilitätsbedingungen ist:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y\, \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z}\right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z\, \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(+\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z}\right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x\, \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(+\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z}\right) \end{aligned} \qquad (89f)$$

Auf der rechten Seite ist wieder zu setzen: $\varepsilon_{yz} = 0$; ferner in der ersten Zeile wegen Vertauschbarkeit der Differentiationen und (87b,c):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} = 0 + 0$$

Schließlich ist in der zweiten Zeile ε_{yy} nach (89c) unabhängig von z, so daß übrig bleibt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial z\, \partial x} &= 0 = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z}\right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} &= -\frac{mQ}{E\Theta} = \frac{\partial}{\partial z}\left(+\frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z}\right) \end{aligned} \qquad (89g)$$

Setzt man die Schubspannungskomponenten ein, so ist zu integrieren:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z}\right) = 0 \qquad (90a)$$

$$\frac{1+m}{E}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z}\right) = -\frac{mQ}{E\Theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z}\right) = -\frac{m}{1+m}\frac{Q}{\Theta} \qquad (90b)$$

Durch Integration der beiden Differentialgleichungen (90a,b) bekommt man die Schubspannungskomponenten τ_{xy} und τ_{xz}. Als Randbedingung wird vorausgesetzt, daß die resultierende Schubspannung am Rand des kreisförmigen Stabquerschnitts tangential gerichtet ist. -

Die Integrationen wurden in Anlehnung an LORENZ[41] unter Vertauschung der Koordinaten x und z nachgerechnet. Abgesehen davon, daß sich Unstimmigkeiten mit einer Integrationskonstanten (Gleichungen 10a,b loc. cit.) ergaben, entfällt dort ein Faktor 2 (Gleichung 29 loc. cit.), mit dem die Schubspannungskomponente τ_{xz} multipliziert werden müßte. - Das richtige Ergebnis der Integration nach LORENZ ist daher für Kreisquerschnitt:

$$\tau_{xy} = \frac{Q}{2(1+m)\cdot\pi r^4}\left[(3+2m)(r^2-y^2) - (1-2m)z^2\right] \qquad (91a)$$

$$\tau_{xz} = \frac{-Q}{2(1+m)\cdot\pi r^4}(2+4m)\cdot yz \qquad (91b)$$

Das Quadrat der resultierenden Schubspannung ist dann:

$$\tau^2 = \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 = \frac{Q^2}{4(1+m)^2\cdot\pi^2 r^8}\left\{\left[(3+2m)(r^2-y^2) - (1-2m)z^2\right]^2 + \left[-(2+4m)yz\right]^2\right\}$$

$$\tau^2 = \frac{Q^2}{4(1+m)^2\pi^2 r^8}\left[(3+2m)^2(r^2-y^2)^2 - 2(3+2m)(1-2m)(r^2-y^2)z^2 + (1-2m)^2z^4 + (2+4m)^2y^2z^2\right]$$

$$\tau^2 = \frac{Q^2}{4(1+m)^2\pi^2 r^8}\left[(9+12m+4m^2)(r^4-2r^2y^2+y^4) + (-6+8m+8m^2)(r^2z^2-y^2z^2) + (1-4m+4m^2)z^4 + (4+16m+16m^2)y^2z^2\right]$$

$$\tau^2 = \frac{Q^2}{4(1+m)^2\pi^2 r^8}\left[(9+12m+4m^2)r^4 + (-18-24m-8m^2)r^2y^2 + (9+12m+4m^2)y^4 + (-6+8m+8m^2)r^2z^2 + (10+8m+8m^2)y^2z^2 + (1-4m+4m^2)z^4\right] \qquad (91c)$$

$$\tau^2 = \frac{Q^2}{4(1+m)^2\pi^2 r^8}\left[A\cdot r^4 + B\cdot r^2y^2 + C\cdot y^4 + D\cdot r^2z^2 + E\cdot y^2z^2 + F\cdot z^4\right] \qquad (91d)$$

In dieser Form erfüllen die Schubspannungskomponenten, wie man durch Einsetzen von (89d) nachprüfen kann, die Kompatibilitätsbedingungen (89g); mit τ_{xz} nach LORENZ aber nicht.

Die fehlerhafte Schubspannungskomponente τ_{xz} übernimmt auch FUCHS[11], der häufig zitiert wird. Er gibt die Kompatibilitätsbedingungen an und meint fälschlich, sie würden von seinen Komponenten befriedigt. Da er jedoch die maximale Schubspannung in der Stabmitte ausrechnet, entfällt zumindest bei kreisförmigem Querschnitt wegen y = z = 0 der falsche Wert τ_{xz}. -

Eine Bestätigung der Gleichungen (91a,b) findet sich bei SOKOLNIKOFF[65], der die Biegung eines zylindrischen Stabes unter dem Einfluß einer Endlast betrachtet. Bei zyklischer Koordinatenvertauschung und Gleichsetzen der Endlast W mit der hier benutzten Scherkraft Q stimmen die Schubspannungskomponenten mit den oben angegebenen überein. -
Auch aus den Berechnungen von LOVE[42] kann man nach einigen Umformungen auf die Gleichungen (91a,b) kommen. -

Eine Komponente τ_{xy} in anderer Form findet sich bei [12]; im übrigen wird dort aber für die Berechnung des Korrekturfaktors $\varkappa$ auf FÖPPLs Ergebnis verwiesen.

FÖPPL[7] hat die Schubspannungskomponenten unter vereinfachenden Annahmen errechnet. Da sein darauf basierender Wert der Konstanten $\varkappa$ in der Literatur mehrfach benutzt wird, soll seine Ableitung ebenfalls dargestellt werden. -

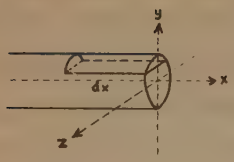
Er geht bei seiner Berechnung der Schubspannungskomponenten - zunächst für rechteckigen Stabquerschnitt - von der willkürlichen Annahme aus, alle Formänderungs- und Spannungsgrößen seien unabhängig von z. Daher bekommt er aus (87a-d):

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0 \qquad (92a)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \qquad (92b)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \qquad (92c)$$

Ferner benutzt er die Spannungs-Dehnungs-Beziehungen, und daher auch die Kompatibilitätsbedingungen nicht, weshalb seine Größen unabhängig von der Poissonkonstanten m sind. -



Zur Berechnung von τ_{xy} stellt FÖPPL die Kraftbilanz für ein Stabelement an der Oberkante auf. Die Spannungskomponenten in x-Richtung rufen folgende Kräfte hervor:

die an der Stirnfläche angreifende Normalkraft dK_σ, die aus der Differenz der Normalspannungen $\sigma_{xx}(x,y)$ im Abstand dx, integriert über das Kreissegment, resultiert - und die Schubkraft dK_τ, die gleich der Schubspannung τ_{yx}, multipliziert mit der unteren Fläche $2z(y)\cdot dx$ ist. - Im Gleichgewicht müssen beide Kräfte gleich sein. - Da die Schubspannung τ_{yx} nach Voraussetzung von z und nach (92b,c) von x unabhängig ist, kann sie direkt mit der Fläche multipliziert werden. -

Dann folgt aus (7) und (88):

$$\sigma_{xx}(x+dx) - \sigma_{xx}(x) = \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx - \sigma_{xx} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx = \frac{Q}{\Theta} y \cdot dx$$

$$dK_\sigma = dx \int_{y}^{r} \int_{-z(y)}^{z(y)} \frac{Q}{\Theta} y \cdot df = \frac{Q}{\Theta} dx \int_{y}^{r} \int_{-z(y)}^{z(y)} y \, dz \, dy = \frac{Q}{\Theta} dx \int_{y}^{r} y \cdot 2z(y) \, dy$$

$$z^2(y) = r^2 - y^2 \rightsquigarrow 2z\,dz = -2y\,dy$$

$$dK_\sigma = \frac{Q}{\Theta} dx \int_{z=\sqrt{r^2-y^2}}^{0} (-2z^2)\, dz = +\frac{Q}{\Theta} \frac{2}{3} \left(\sqrt{r^2-y^2}\right)^3 dx \qquad (93a)$$

$$dK_\tau = \tau_{yx} \cdot 2z(y)\, dx = \tau_{yx} \cdot 2\sqrt{r^2-y^2}\, dx \qquad (93b)$$

Die Gleichheit beider Kräfte ergibt mit (92c):

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = \frac{Q}{\Theta} \cdot \frac{(r^2-y^2)}{3} = \frac{Q}{\pi r^4} \cdot \frac{4}{3} (r^2-y^2) \qquad (94)$$

In der erweiterten Form

$$\tau_{xy} = \frac{Q}{2(1+m)\pi r^4} \left(\frac{8}{3} + \frac{8}{3} m\right)(r^2-y^2) \qquad (94a)$$

erkennt man, daß diese Komponente eine gewisse Ähnlichkeit mit der exakten (91a) hat; für m = 0.5 sind beide gleich. -

Bemerkenswert ist, daß die Ableitungen von σ_{xx} und τ_{yx} den Resultantensatz (92a) so nicht erfüllen. -

Speziell bei kreisförmigem Querschnitt berechnet FÖPPL[7] aber auch eine Schubspannungskomponente τ_{xz} daraus, daß die resultierende Schubspannung am Stabumfang tangential gerichtet sein muß:

$$\frac{\tau_{xy}}{\tau_{xz}} = -\frac{z}{y} \quad ; \quad \tau_{xz} = -\tau_{yz}\cdot\frac{y}{z} = -\frac{y}{z}\cdot\frac{Q}{\Theta}\cdot\frac{z^2}{3}$$

$$\tau_{xz} = -\frac{Q}{\Theta}\frac{yz}{3} = -\frac{Q}{\pi r^4}\frac{4}{3}yz \qquad (94b)$$

In der erweiterten Form

$$\tau_{xz} = -\frac{Q}{2(1+\omega)\cdot\pi r^4}\left(\frac{8}{3}+\frac{8}{3}m\right)yz \qquad (94c)$$

erkennt man auch hier die Ähnlichkeit mit (91b); für m = 0.5 sind ebenfalls beide gleich. -

Damit ist der Resultantensatz befriedigt:

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} = 0 = \frac{Q}{\Theta}y - \frac{2}{3}\frac{Q}{\Theta}y - \frac{1}{3}\frac{Q}{\Theta}y$$

Das Quadrat der Schubspannung τ_{xy} beträgt:

$$\tau_{xy}^2 = \frac{Q^2}{\pi^2 r^8}\frac{16}{9}\left(r^4 - 2r^2y^2 + y^4\right) \qquad (94d)$$

das der resultierenden Schubspannung:

$$\tau^2 = \frac{Q^2}{\pi^2 r^8}\frac{16}{9}\left(r^4 - 2r^2y^2 + y^4 + y^2z^2\right) \qquad (94e)$$

Hierbei darf man nicht wie FÖPPL z durch $\sqrt{r^2-y^2}$ ersetzen,

$$\tilde{\tau}^2 = \frac{16}{9}\frac{Q^2}{\pi^2 r^8}\left[(r^2-y^2)^2 + y^2(r^2-y^2)\right] = \frac{16}{9}\frac{Q^2}{\pi^2 r^8}\left[(r^2-y^2)\cdot r^2\right] = \frac{16}{9}\frac{Q^2}{\pi^2 r^6}\cdot z^2$$

zusammenfassen und wieder z einsetzen, denn später ist über den Stabquerschnitt zu integrieren. -
Mit den Schubspannungsquadraten (91c) sowie (94d,e) wird die Konstante $\varkappa$ berechnet. -

2. Ermittlung von $\varkappa$ aus der Formänderungsarbeit

Wie bereits auf S. 62 erwähnt, kann man die Konstante $\varkappa$ nach FÖPPL[7] aus der Deformationsarbeit an einem Volumenelement des gebogenen Stabes berechnen. -

Bei der Dehnung eines Stabes unter dem Einfluß einer Zugkraft K bezw. einer Normalspannung σ, die der Verlängerung Δl proportional ist, beträgt die Formänderungsarbeit:

$$\Delta A = \int_l^{l+\Delta l} K(\Delta l)\, d(\Delta l) = \int_l^{l+\Delta l} \sigma f\, d(\Delta l) = \int_l^{l+\Delta l} E\varepsilon f\, d(\Delta l) = \int_l^{l+\Delta l} E \cdot \frac{\Delta l}{l} \cdot f\, d(\Delta l)$$

$$\Delta A = \frac{Ef}{l} \cdot \frac{(\Delta l)^2}{2} = \frac{K(\Delta l) \cdot \Delta l}{2} \qquad (95)$$

Auf das Stabvolumen $V = f \cdot l$ bezogen ist dann:

$$\frac{\Delta A}{V} = \frac{Ef \cdot (\Delta l)^2}{2f \cdot l^2} = \frac{E\varepsilon^2}{2} = \frac{\sigma^2}{2E} \qquad (95a)$$

Bei der Biegung eines Stabes muß die Formänderungsarbeit wegen der Verschiedenheit der Normalspannungen $\sigma(y)$ in den einzelnen Fasern ausgehend von (95a) über den Querschnitt integriert werden. -

Analog gilt für Schubspannungen:

$$\frac{\Delta A}{V} = \frac{\tau^2}{2G} \qquad (95b)$$

Daher beträgt die Arbeit dA, die im Stabelement der Länge dx bei Biegung gegen die Schubspannungen geleistet wird:

$$dA = \int \frac{\tau^2}{2G}\, df\, dx \qquad (96)$$

Da alle vorher angegebenen Schubspannungen von x unabhängig sind, ist hier zu integrieren:

$$dA = dx \cdot \int_{y=-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{z=-K(y)}^{z=K(y)} \frac{\tau^2(y,z)}{2G}\, dz\, dy \qquad (96a)$$

Andererseits bewirkt die am Stabquerschnitt angreifende Scherkraft Q eine Scherung des Stabelements, die nahe der Achse einen Winkelbetrag γ erreicht. Dem entspricht eine Parallelverschiebung der Mittelpunkte zweier benachbarter Stabquerschnitte im Abstand dx um den Betrag $du = \kappa d\bar{u}$, vgl. (53) und Skizze auf S. 61. -

Die dafür erforderliche, der Verschiebung du proportionale Arbeit beträgt nach (95) und (52, 53):

$$dA = \frac{Q \cdot du}{2} = \kappa \cdot \frac{Q \cdot d\bar{u}}{2} = \kappa \cdot \frac{Q^2}{2fG} dx \qquad (97)$$

Aus der Gleichheit der beiden Arbeitsbeträge (96, 97) kann man die Konstante κ bestimmen:

$$\frac{dx}{2G} \cdot \iint \tau^2 \, df = \kappa \cdot \frac{dx}{2G} \cdot \frac{Q^2}{f}$$

$$\boxed{\kappa = \frac{f}{Q^2} \cdot \iint \tau^2 \, df} \qquad (98)$$

Setzt man nach (51) $\frac{Q}{f} = \hat{\tau}$, so erkennt man, daß die Konstante κ einer Mittelwertbildung entspricht:

$$\kappa \cdot \frac{Q^2}{f^2} = \kappa \hat{\tau}^2 = \frac{1}{f} \iint \tau^2 \, df \qquad (98a)$$

Numerische Werte für κ werden nach (98) im folgenden Abschnitt errechnet. -

3. Numerische Bestimmung von κ

Nach Gleichung (98) wird das Quadrat der resultierenden Schubspannung (91c,d) von $z = -z(y)$ bis $+z(y)$ und von $y = -r$ bis $+r$ integriert:

$$\kappa = \frac{F}{Q^2}\cdot\iint\tau^2(y,z)\,dz\,dy = \frac{\pi r^2}{Q^2}\frac{Q^2}{4(1+m)^2\pi^2r^6}\cdot\iint\left(Ar^4 + Br^2y^2 + Cy^4 + Dr^2z^2 + Ey^2z^2 + Fz^4\right)dz\,dy$$

$$\kappa = \frac{1}{4(1+m)^2\pi r^4}\cdot\int\left(Ar^4\cdot 2z + Br^2\cdot 2y^2z + C\cdot 2y^4z + Dr^2\cdot\frac{2}{3}z^3 + E\cdot\frac{2}{3}y^2z^3 + F\cdot\frac{2}{5}z^5\right)dy$$

Dabei ergeben die Integrationen mit $z(y) = \sqrt{r^2 - y^2}$ (99)

$$\int_{y=-r}^{r} z\,dy = \frac{\pi r^2}{2} \qquad (99a)$$

$$\int_{y=-r}^{r} y^2 z\,dy = \frac{\pi r^4}{8} \qquad (99b)$$

$$\int_{y=-r}^{r} y^4 z\,dy = \frac{\pi r^6}{16} \qquad (99c)$$

Höhere ungerade Potenzen von z(y) werden für die Integration über y durch $z^1(y)$ und $(r^2 - y^2)$ ausgedrückt:

$$\kappa = \frac{1}{4(1+m)^2\pi r^6}\int\left(Ar^4\cdot 2z + Br^2\cdot 2y^2z + C\cdot 2y^4z + \frac{2}{3}Dr^2\cdot z - \frac{2}{3}Dr^2y^2z + \frac{2}{3}Er^2y^2z - \frac{2}{5}Ey^4z + \frac{2}{5}Fr^2y^2z - \frac{4}{5}Fr^2y^4z + \frac{2}{5}Fy^4z\right)dy$$

$$\kappa = \frac{1}{4(1+m)^2\pi r^6}\left(A\cdot\pi r^6 + B\cdot\frac{\pi r^6}{4} + C\cdot\frac{\pi r^6}{8} + D\cdot\frac{\pi r^6}{3} - D\cdot\frac{\pi r^6}{12} + E\cdot\frac{\pi r^6}{12} - E\cdot\frac{\pi r^6}{24} + F\cdot\frac{\pi r^6}{5} - F\cdot\frac{\pi r^6}{10} + F\cdot\frac{\pi r^6}{40}\right)$$

$$\kappa = \frac{1}{4(1+m)^2}\left(A + \frac{B}{4} + \frac{C}{8} + \frac{D}{4} + \frac{E}{24} + \frac{F}{8}\right)$$

$$\kappa = \frac{1}{4(1+m)^2}\cdot\frac{1}{24}\left[\left(216 + 288m + 96m^2\right) + \left(-108 - 144m - 48m^2\right) + \left(27 + 36m + 12m^2\right) + \left(-36 + 48m + 48m^2\right) + \left(10 + 8m + 8m^2\right) + \left(3 - 12m + 12m^2\right)\right]$$

$$\kappa = \frac{1}{4(1+m)^2}\cdot\frac{1}{24}\left(112 + 224m + 128m^2\right)$$

$$\boxed{\kappa = \frac{7 + 14m + 8m^2}{6\cdot(1+m)^2}} \qquad (100)$$

Aus Gleichung (66) bekommt man dann: $U = \kappa\cdot\frac{E}{G} = 2\kappa\cdot(1+m)$

$$\boxed{U = \frac{7 + 14m + 8m^2}{3\cdot(1+m)}} \qquad (101)$$

Die Konstanten κ und U sind also nur von der Poissonkonstanten m abhängig. -

Ein Vergleichswert konnte in der Literatur nicht gefunden werden. Gewisse Ähnlichkeiten mit (101) hat lediglich ein Ausdruck, den LOVE[42] als Korrektur der Krümmung eines

einseitig eingespannten Stabes unter seinem eigenen Gewicht angibt; das Biegemoment D ist danach am Stabanfang x = 0 um den Faktor verkleinert: $D = D_0\left(1 - \frac{7+12m+4m^2}{6(1+m)}\cdot\frac{r^2}{l^2}\right)$.
In diesem Fall gelten aber andere Kompatibilitätsbedingungen.

Während TIMOSCHENKO[70] ohne Ableitung mit einem $\kappa = 3/2$ entsprechenden Wert rechnet, wird sonst bei kreisförmigem Querschnitt oft[9, 12, 15, 34] der Wert benutzt, der sich aus der Integration von FÖPPLs Komponente τ_{xy} (94d) ergibt:

$$\kappa = \frac{\pi r^2}{Q^2}\cdot\iint\frac{16}{9}\frac{Q^2}{\pi^2 r^8}\left(r^4 - 2r^2y^2 + y^4\right)dz\,dy$$

$$\kappa = \frac{16}{9\pi^2 r^6}\cdot\int\left(2r^4 z - 4r^2\cdot y^2 z + 2\cdot y^4 z\right)dy$$

$$\kappa = \frac{16}{9\pi^2 r^6}\left(2r^4\cdot\frac{\pi r^2}{2} - 4r^2\cdot\frac{\pi r^4}{8} + 2\cdot\frac{\pi r^6}{16}\right) = \frac{16}{9}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right)$$

$$\underline{\underline{\kappa = \frac{10}{9}}} \qquad (100a)$$

Eine Integration des Quadrats des resultierenden Schubspannung gibt nach FÖPPL[7] einen etwas größeren Wert (ohne Angabe), sie sei aber eine Abschätzung, die keinen Anspruch auf besondere Genauigkeit erhebe. -
Falls man bei (94e) z durch y ausdrückt und dann erst integriert, bekommt man das Verhältnis der maximalen zur mittleren Schubspannung, das nach (94) den Wert 4/3 hat; bei richtiger Integration ergibt sich jedoch:

$$\kappa = \frac{\pi r^2}{Q^2}\iint\frac{16}{9}\frac{Q^2}{\pi^2 r^8}\left(r^4 - 2r^2y^2 + y^4 + y^2z^2\right)dz\,dy$$

$$\kappa = \frac{16}{9\pi r^6}\int\left(2r^4\cdot z - 4r^2\cdot y^2 z + 2\cdot y^4 z + \frac{2}{3}y^2z^3\right)dy$$

$$\kappa = \frac{16}{9\pi r^6}\int\left(2r^4\cdot z - 4r^2\cdot y^2 z + 2\cdot y^4 z + \frac{2}{3}r^2\cdot y^2 z - \frac{2}{3}y^4 z\right)dy$$

$$\kappa = \frac{16}{9\pi r^6}\left(2r^4\cdot\frac{\pi r^2}{2} - 4r^2\cdot\frac{\pi r^4}{8} + 2\cdot\frac{\pi r^6}{16} + \frac{2}{3}r^2\cdot\frac{\pi r^4}{8} - \frac{2}{3}\cdot\frac{\pi r^6}{16}\right)$$

$$\kappa = \frac{16}{9}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} - \frac{1}{24}\right) = \frac{16}{9}\cdot\frac{16}{24}$$

Mit dem Quadrat der resultierenden Schubspannung nach FÖPPL wird also unabhängig von m :

$$\kappa = \frac{32}{27} \qquad (100b)$$

Da FÖPPLs Komponenten τ_{xy} und τ_{xz} für m = 0.5 gleich den allgemeineren sind, stimmt auch dieser Wert κ für m = 0.5 mit dem vom Verfasser hergeleiteten (100) überein. So ist (100b) durchaus eine brauchbare Abschätzung, besonders für Polymerstäbe im Erweichungsgebiet. -

Schließlich erwähnt noch PICKETT[55] eine Formel, deren Herkunft sich nicht klären ließ:

$$\kappa = \frac{24+15m}{20(1+m)} \qquad (100c)$$

Er hält es jedoch für den praktischsten Weg, κ empirisch zu bestimmen und kommt bei zylindrischen Stäben zu den Werten:

$$\begin{aligned} \kappa &= 6/5 \quad \text{für} \quad m = 0 \\ \kappa &= 9/8 \quad \text{für} \quad m = 1/6 \\ \kappa &= \frac{1}{0.85} \quad \text{für} \quad m = 1/3 \end{aligned} \qquad (100d)$$

Zum Vergleich werden die Werte der Konstanten κ nach den Beziehungen (100-100d) in Abhängigkeit von m graphisch wiedergegeben in (G. 3). -

Man erkennt, daß PICKETTs Wert (100d) bei m = 1/3 praktisch auf der exakten Kurve (100) liegt. Für seine Messungen an Betonproben mit $m \approx 1/6$ und $\kappa = 9/8$ bekommt er gute Übereinstimmung bei Verwendung der GOENSschen Näherungen, was sich daraus erklärt, daß seine empirische Größe 9/8 dem Wert 10/9 nahe kommt. -

Da $\varkappa$ in der exakten Gleichung (100) mit der Poissonkonstanten m nur sehr wenig variiert, kann man mit Recht erwarten, daß die aus den Eigenwertgleichungen (83a,b) berechneten Werte M_n' nur schwach von m abhängig sind. Zu ihrer Ermittelung genügt daher ein Näherungswert für m, der etwa aus Tabellenwerken zu entnehmen ist. -

So kann mit Hilfe der hier dargestellten Zwei-Elastizitätskonstanten-Theorie (E und m) der Elastizitätsmodul E bei Kenntnis eines Näherungswertes von m quasi als Einzelgröße gemessen werden, und zwar auch an kurzen, dicken Stäben und mit höheren Oberschwingungen. Die bisher erforderliche Beschränkung auf lange, dünne Stäbe kann entfallen, so daß Frequenz- und Temperaturbereich erweitert werden. -
Bisher galten nur Torsionsmodul G und Kompressionsmodul K als einzeln meßbar[30)], außerdem nach der Methode von KÄSTNER[30)] bei sehr niedriger Frequenz auch die Querkontraktionskonstante m. -

Zum Beweis der geringen Abhängigkeit der Eigenwerte von m wurde ein besonders extremes Beispiel gewählt: Stabdurchmesser 10 cm, Stablänge 12 cm. Dann errechnet man für M_o:

$$M_o = 3.364\ 87 \quad \text{bei} \quad m = 0.30$$
$$M_o = 3.347\ 99 \quad \text{bei} \quad m = 0.40$$
$$M_o = 3.330\ 73 \quad \text{bei} \quad m = 0.50\ .$$

Obwohl die Länge des Stabes nur noch wenig über der Mindestlänge nach (86a) liegt, weichen vom mittleren Wert $M_o(m = 0.40)$ die beiden anderen nur um $\pm$ 0.5 °/o ab; der E-Modul würde also um $\pm$ 2 °/o differieren. -

4. Poissonkonstanten m der untersuchten Stäbe

Im allgemeinen wird m als Quotient der beiden elastischen Moduln E und G gemessen; nach (65) ist $m = \frac{E}{2G} - 1$. Statisch kann m direkt durch einachsigen Zug oder Druck bestimmt werden[6]. Eine direkte Meßmethode bei niedrigen Frequenzen entwickelte KÄSTNER[30], der m aus der Verformung rechteckiger Stabquerschnitte bei Biegung nach der exakten Biegungstheorie berechnet. -

Die Poissonkonstante m ist temperatur- und dehnungsäbhängig; auch bei Volumenkonstanz gilt m = 0.50 nur für kleine Elongationen[40]. RIGBI[60] gibt m als Funktion der relativen Dehnung ϵ bei Volumenkonstanz an:

$$m = \frac{1}{\epsilon}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon}}\right)$$

Die bei Biegeschwingungen auftretenden Deformationen sind aber so gering, daß dieser Einfluß unmerkbar bleibt. -

Metalle haben Werte im Bereich $0.25 \leq m \leq 0.45$ mit einem Mittelwert von $m = 1/3$ nach KÖSTER[40]; speziell für Aluminium ist $m = 0.34$. - Mit dieser Größe wurden die Eigenwerte des Stabes ALU II berechnet. -

Bei Polymeren ist m temperatur- und frequenzabhängig. Allgemein gilt nach [47] im Glaszustand etwa $m = 1/3$, im gummielastischen $m = 1/2$. Auch bei anorganischen Gläsern nimmt m mit der Temperatur gegen 1/2 hin zu[67]. -

Speziell für PMMA geben eine Reihe von Autoren $m(T,\nu)$ an. Weil die Haupt- und Nebendispersionsgebiete von E und G

für konstante Temperatur bei verschiedenen Frequenzen liegen, sollte m(ν) durch ein Minimum gehen[23]. E und m relaxieren bei gleicher Frequenz, und zwar dort, wo der Imaginärteil E" sein Maximum hat[30]. Mit abnehmender Frequenz steigt m im tieffrequenten Bereich nach direkten Messungen von KÄSTNER[30] monoton an. -

Ebenso steigt m im allgemeinen mit der Temperatur an. Auch hier ist die Existenz eines Minimums wegen der verschiedenen Relaxationstemperaturen von E und G denkbar, wenn auch das Auftreten eines Minimums bei m(T) gelegentlich[23] auf ungenügende Einstellung des Temperaturgleichgewichts zurückgeführt wird. -

Ergebnisse der Messungen verschiedener Autoren an PMMA, die zum Teil graphischen Darstellungen entnommen wurden, sind folgende Werte der Poissonkonstanten:

FEDORENKO[6]: statisch bei 20°C: m = 0.38

dynamisch mit $\nu \approx 400$ Hz aus E/G :

T [°C]	-60°	+20°	+80°	100°
m(T)	0.41	0.395	0.413	0.445

KÄSTNER[30]: direkte dynamische Messung mit $5 \cdot 10^{-2}$ Hz:

T [°C]	25°	62°	92°	100°	108°	120°
m(T)	0.36	0.38	0.40	0.43	0.49	0.50

und bei verschiedenen Temperaturen:

	ν [Hz]	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}
T = 90.5°	m(ν)	0.42	0.41	0.40
T = 101°	m(ν)	0.48	0.45	0.43
T = 106°	m(ν)	0.50	0.49	0.47

KOPPELMANN[37, 38]: bei Zimmertemperatur aus E/G :

ν[Hz]	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^{0}	10^{1}	10^{2}	10^{3}	10^{4}
m(ν)	0.30	0.32	0.31	0.25	0.12	0.23	0.30	0.32

Dabei liegt um 2 Hz ein Dämpfungsmaximum, also ein Dispersionsgebiet.

PANSHIN[54]: dynamisch mit $\nu \approx 400$ Hz aus E/G :

T °C	-60°	20°	80°	100°
m(T)	0.41	0.40	0.36	0.35

bei höheren Temperaturen u. U. Minimum, danach Annäherung an m = 0.50 .

Obwohl die Angaben zum Teil sehr differieren, liegt die Querkontraktionskonstante m - abgesehen von dem Minimum, das KOPPELMANN im Bereich um 10 Hz bei Zimmertemperatur findet - im gesamten angegebenen Temperaturintervall zwischen 0.30 und 0.50 . -

Daher wurden die E-Moduln der in der vorliegenden Arbeit untersuchten PMMA-Stäbe zunächst mit den Werten m = 0.32, 0.40 und 0.50 berechnet. Die Abweichungen lagen dabei wegen der geringen Variation der Eigenwerte M_n' im Rahmen der Meßgenauigkeit. Deshalb konnte schließlich im gesamten Temperatur- und Frequenzbereich der Mittelwert m = 0.40 für PMMA eingesetzt werden. Der Elastizitätsmodul wird dadurch im ungünstigsten Fall um $\pm$ 1.5 °/o verfälscht, während nach der einfachen Theorie Abweichungen von über 30 °/o bei kurzen, dicken Stäben entstanden wären. -

V. Schwingungsdämpfung in Polymeren

Resonanzschwingungen in Stäben lassen sich nur durch ständige Energiezufuhr aufrecht erhalten, weil sie infolge von innerer und äußerer Reibung sowie durch Schallabstrahlung gedämpft werden. -

Die äußere Reibung fällt bei Polymerstäben im allgemeinen nicht sehr ins Gewicht. Soweit sie von Energieübertragung auf die Stabhalterungen herrührt, kann sie durch Wahl einer günstigen Lagerung fast ausgeschlossen werden. Durch Beschränkung der Schwingungsamplitude läßt sich die Luftreibung verringern. - Bei höheren Frequenzen kommt Schallabstrahlung hinzu, die nach KNESER[35] bei Metallstäben die anderen äußeren Dämpfungsanteile oberhalb des folgenden Verhältnisses von Wellenzahl k_n zu Stabradius r überwiegt:

$$k_n \cdot r = \frac{2\pi}{\lambda_n} \cdot r > 0.3 \quad .$$

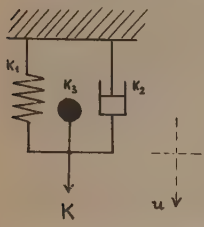
Bei Polymeren fällt sie aber kaum ins Gewicht, denn deren äußere Dämpfung macht bei Zimmertemperatur nach Vakuum-Vergleichsmessungen von NIELSEN[46] insgesamt nur etwa 10 % der inneren Dämpfung aus. Daher bleibt man mit steigender Temperatur auch bei Vernachlässigung der äußeren Reibung schon bald im Bereich der Meßgenauigkeit der Dämpfung von Polymeren. -

Deswegen soll in den folgenden Abschnitten unter "Dämpfung" immer die innere Dämpfung verstanden werden. - Neben einer direkten Messung der Dämpfung, deren Kenntnis in Abhängigkeit von Temperatur und Frequenz Rückschlüsse auf molekulare Mechanismen der untersuchten Substanz erlaubt, inter-

essiert auch ihr Einfluß auf die Resonanzfrequenz, wenn der E-Modul mit einiger Genauigkeit bestimmt werden soll. -

1. Harmonischer Oszillator als Dämpfungsmodell

Wegen der periodischen Lösung (27) $y_n = y_{on}\cos(\omega_n t)$ des zeitlichen Teils (12) der Differentialgleichungen der Biegeschwingung, die in der einfachen wie in der erweiterten Theorie gilt, liegt es nahe, als Modell das des harmonischen Oszillators heranzuziehen, weil es die gleiche Zeitabhängigkeit aufweist. Dies bedeutet die Annahme einer Superposition von Kräften oder Spannungen:



Federkraft $K_1 = c \cdot u$ (102a)

Reibungskraft $K_2 = \beta \frac{du}{dt}$ (102b)

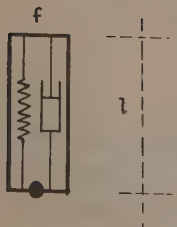
Trägheitskraft $K_3 = m \frac{d^2u}{dt^2}$ (102c)

Es gilt für eine von der periodischen Kraft $K_o\cos(\omega t)$ erzwungene Schwingung dann die Gleichung:

$$m\ddot{u} + \beta\dot{u} + cu = K_o(t)$$

$$\ddot{u} + \frac{\beta}{m}\dot{u} + \frac{c}{m}u = \frac{K_o(t)}{m}$$

$$\ddot{u} + 2\delta\dot{u} + \omega_o^2 u = \frac{K_o(t)}{m} \qquad (103)$$



Eine entsprechende Schwingungsgleichung kann man auch mit Spannung σ und relativer Dehnung $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ bekommen: Der harmonische Oszillator entspreche einem viskoelastischen Stab mit der Länge l und dem Querschnitt f, dessen ganze Masse m am schwingenden Ende mit der Ruhelage $u = \Delta l = 0$ konzentriert zu denken ist:

$$m\cdot\frac{\ddot{u}}{l} + \beta\cdot\frac{\dot{u}}{l} + c\cdot\frac{u}{l} = K_0(t) = f\cdot\sigma_0(t)$$

$$\frac{m}{f}\cdot\ddot{\varepsilon} + \frac{\beta}{f}\cdot\dot{\varepsilon} + \frac{c}{f}\cdot\varepsilon = \sigma_0(t)$$

$$\ddot{\varepsilon} + 2\delta\cdot\dot{\varepsilon} + \omega_0^2\cdot\varepsilon = \frac{f}{m}\cdot\sigma_0(t) \qquad (103a)$$

Dabei besteht nach dem Hooke'schen Gesetz $\sigma = E\cdot\varepsilon$ zwischen dem E-Modul und der Federkonstanten c die Beziehung:

$$c\cdot\frac{l}{f} = E \qquad (103b)$$

sowie zwischen dem Reibungskoeffizienten β und der Viskosität

$$\beta\cdot\frac{l}{f} = 2\delta\cdot m\cdot\frac{l}{f} = \eta \qquad (103c)$$

Bei der üblichen Behandlung der Schwingungsgleichung (103) bekommt man die Resonanzfrequenz ω_r, die von der Eigenfrequenz ω_0 der ungedämpften Schwingung etwas abweicht:

$$\omega_r^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2 \qquad (104)$$

Die Halbwertsbreite $\Delta\nu$, d.h. die Differenz der beiden Frequenzen, an denen die Energie der Schwingung die Hälfte der maximalen beträgt, oder das Quadrat der Amplitude auf die Hälfte des Resonanz-Amplituden-Quadrates gesunken ist, ergibt sich aus: $\omega_w = \omega_0 \pm \delta$

$$\omega_{w_2} - \omega_{w_1} = 2\delta$$

$$\frac{\omega_{w_2} - \omega_{w_1}}{\omega_0} = \frac{\nu_{w_2} - \nu_{w_1}}{\nu_0} = \frac{\Delta\nu}{\nu_0} = d = \frac{2\delta}{\omega_0} \approx \frac{2\delta}{\omega_r} \qquad (105)$$

mit dem Dämpfungsfaktor d . -

Die Dämpfung d wird von den meisten Autoren auf diesem Wege bestimmt[9, 25, 31, 48, 50], auch bei Benutzung anderer viskoelastischer Modelle[27, 47, 77]. Im Fall höherer Dämpfung rechnet BECKER[1] mit Korrekturgliedern bei $\frac{\Delta\nu}{\nu}$. - Zu beachten ist, daß die Dämpfung wegen $\Delta\nu$ stets bei einem Frequenzband gemessen wird[5, 22]. -

Statt die Halbwertsbreite $\Delta\nu$ zwischen den Stellen zu messen, an denen die Amplitude A auf den Betrag $\frac{A_{max}}{\sqrt{2}}$ gesunken ist, nimmt man gelegentlich auch die Halbwertsbreite $\Delta\nu_H$ mit den

Stellen ν_H bei $\frac{A_{max}}{2}$. Dann gilt $\frac{\Delta\nu_H}{\nu_o} = \sqrt{3}\cdot d$, (105a)
aber derartige Messungen[46] sind meist weniger genau, weil die bei der Herleitung von (105a) nötigen mathematischen Vereinfachungen nur in naher Umgebung der Resonanzstelle gelten. -
Nicht mit der Halbwertsbreite, sondern mit Amplitude und Phasenverschiebung rechnet BLAND[3] die Dämpfung aus. Seine Methode ist sehr umständlich, setzt aber kein viskoelastisch einfaches Verhalten voraus. -

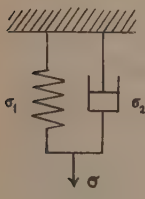
Zwischen Real- und Imaginärteil des komplexen E-Moduls erhält man die Beziehungen:

$$\bar{E} = E' + iE'' = E' + idE' = E'(1 + id) \qquad (106)$$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_o} = d = \frac{E''}{E'} \qquad (106a)$$

2. Viskoelastische Dämpfungsmodelle

Besser kann das Spannungs-Dehnungs-Verhalten von Polymeren mit Voigt-Kelvin- und Maxwell-Modellen angenähert werden. - Voigt-Kelvin-Modelle entsprechen der Parallelschaltung von



Feder und Dämpfer. Sie dienen der Repräsentation vollkommen reversibler viskoelastischer Deformationen. - Für sie folgt aus der Addition der einzelnen Spannungen die Differentialgleichung:

$$\sigma(t) = E\cdot\varepsilon(t) + \eta\cdot\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} \qquad (107)$$

Maxwell-Modelle repräsentieren das viskose Kriechen oder Fließen sowie die Spannungsrelaxation durch Addition von

$$ml \cdot \frac{\ddot{u}}{l} + \beta l \cdot \frac{\dot{u}}{l} + cl \cdot \frac{u}{l} = K_0(t) = f \cdot \sigma_0(t)$$

$$\frac{ml}{f} \cdot \ddot{\varepsilon} + \frac{\beta l}{f} \cdot \dot{\varepsilon} + \frac{cl}{f} \cdot \varepsilon = \sigma_0(t)$$

$$\ddot{\varepsilon} + 2\delta \cdot \dot{\varepsilon} + \omega_0^2 \cdot \varepsilon = \frac{f}{ml} \cdot \sigma_0(t) \qquad (103a)$$

Dabei besteht nach dem Hooke'schen Gesetz $\sigma = E \cdot \varepsilon$ zwischen dem E-Modul und der Federkonstanten c die Beziehung:

$$c \cdot \frac{l}{f} = E \qquad (103b)$$

sowie zwischen dem Reibungskoeffizienten β und der Viskosität

$$\beta \cdot \frac{l}{f} = 2\delta \cdot m \cdot \frac{l}{f} = \eta \qquad (103c)$$

Bei der üblichen Behandlung der Schwingungsgleichung (103) bekommt man die Resonanzfrequenz ω_r, die von der Eigenfrequenz ω_0 der ungedämpften Schwingung etwas abweicht:

$$\omega_r^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2 \qquad (104)$$

Die Halbwertsbreite $\Delta\nu$, d.h. die Differenz der beiden Frequenzen, an denen die Energie der Schwingung die Hälfte der maximalen beträgt, oder das Quadrat der Amplitude auf die Hälfte des Resonanz-Amplituden-Quadrates gesunken ist, ergibt sich aus: $\omega_w = \omega_0 \pm \delta$

$$\omega_{w_2} - \omega_{w_1} = 2\delta$$

$$\frac{\omega_{w_2} - \omega_{w_1}}{\omega_0} = \frac{\nu_{w_2} - \nu_{w_1}}{\nu_0} = \frac{\Delta\nu}{\nu_0} = d = \frac{2\delta}{\omega_0} \approx \frac{2\delta}{\omega_r} \qquad (105)$$

mit dem Dämpfungsfaktor d . -

Die Dämpfung d wird von den meisten Autoren auf diesem Wege bestimmt[9, 25, 31, 48, 50], auch bei Benutzung anderer viskoelastischer Modelle[27, 47, 77]. Im Fall höherer Dämpfung rechnet BECKER[1] mit Korrekturgliedern bei $\frac{\Delta\nu}{\nu}$. - Zu beachten ist, daß die Dämpfung wegen $\Delta\nu$ stets bei einem Frequenzband gemessen wird[5, 22]. -

Statt die Halbwertsbreite $\Delta\nu$ zwischen den Stellen zu messen, an denen die Amplitude A auf den Betrag $\frac{A_{max}}{\sqrt{2}}$ gesunken ist, nimmt man gelegentlich auch die Halbwertsbreite $\Delta\nu_H$ mit den

Stellen ν_H bei $\frac{A_{max}}{2}$. Dann gilt $\frac{\Delta\nu_H}{\nu_o} = \sqrt{3}\cdot d$, (105a)
aber derartige Messungen[46] sind meist weniger genau, weil die bei der Herleitung von (105a) nötigen mathematischen Vereinfachungen nur in naher Umgebung der Resonanzstelle gelten. -
Nicht mit der Halbwertsbreite, sondern mit Amplitude und Phasenverschiebung rechnet BLAND[3] die Dämpfung aus. Seine Methode ist sehr umständlich, setzt aber kein viskoelastisch einfaches Verhalten voraus. -

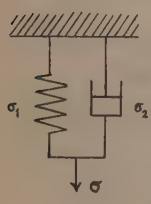
Zwischen Real- und Imaginärteil des komplexen E-Moduls erhält man die Beziehungen:

$$\bar{E} = E' + iE'' = E' + idE' = E'(1 + id) \qquad (106)$$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_o} = d = \frac{E''}{E'} \qquad (106a)$$

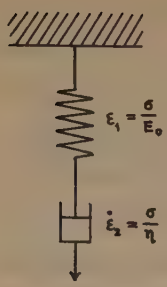
2. Viskoelastische Dämpfungsmodelle

Besser kann das Spannungs-Dehnungs-Verhalten von Polymeren mit Voigt-Kelvin- und Maxwell-Modellen angenähert werden. - Voigt-Kelvin-Modelle entsprechen der Parallelschaltung von Feder und Dämpfer. Sie dienen der Repräsentation vollkommen reversibler viskoelastischer Deformationen. - Für sie folgt aus der Addition der einzelnen Spannungen die Differentialgleichung:



$$\sigma(t) = E\cdot\varepsilon(t) + \eta\cdot\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} \qquad (107)$$

Maxwell-Modelle repräsentieren das viskose Kriechen oder Fließen sowie die Spannungsrelaxation durch Addition von



Dehnungen; Feder und Dämpfer sind hintereinander geschaltet. Ihre Differentialgleichung ergibt sich mit der Maxwellschen Relation

$$\tau_R = \frac{\eta}{E_0} \qquad (108)$$

für die Relaxationszeit τ_R aus der Addition der Deformationsgeschwindigkeiten:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t)$$

$$\dot{\varepsilon}(t) = \dot{\varepsilon}_1(t) + \dot{\varepsilon}_2(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E_0} + \frac{\sigma(t)}{\eta} = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E_0} + \frac{\sigma(t)}{\tau_R \cdot E_0}$$

$$E_0 \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\sigma(t)}{\tau_R} \qquad (109)$$

Diese Differentialgleichungen werden z.B. von[13, 59, 63] angegeben. Zur Beschreibung des viskoelastischen Verhaltens von Polymeren benutzt man dann ein Netzwerk aus parallel geschalteten Maxwell-Modellen und hintereinander geschalteten Voigt-Kelvin-Modellen mit verschiedenen Relaxationszeiten τ_R, so daß das Relaxationszeit-Spektrum approximiert wird[20, 47]. Da die beiden angegebenen Kombinationen sich in ihrer Wirkung ergänzen, kommt nach HECKEL[21] wegen der verschiedenen möglichen Zuordnungen den einzelnen Modellen höchstens eine anschauliche Bedeutung zu. -

Für den gummielastischen Bereich der Polymeren denkt dagegen SLONIMSKY[64] an eine Beschreibung des elastischen Verhaltens durch eine Kette von Masse-Kugeln, Federn und biegbaren Molekülsegmenten, die sich in einer viskosen Flüssigkeit befinden, um so den Einfluß molekularer und übermolekularer Strukturen zu berücksichtigen. -

3. Schwingungsgleichungen und Dämpfungsverhalten

Eine Biegeschwingungs-Differentialgleichung mit innerer und äußerer Reibung, die analog zum harmonischen Oszillator behandelt wird, geben MUTO[45] und WAGNER[75] an. Auf die erzwungene Biegeschwingung wurde das Voigt-Kelvin-Modell übertragen von HORIO[27] und ZELENEV[77]. Für frei abklingende Schwingungen betrachtet GLAUZ[13] außerdem das Maxwell-Modell. RETTING[59] beschreibt eine Lösung der Differentialgleichung des Maxwell-Modells für den Fall sinusförmiger Spannung und Dehnung. -

Die äußere Reibung wird nach MUTO[45] und WAGNER[75] mit dem Reibungsfaktor r_a proportional zur Transversalschnelle $v = \frac{\partial y}{\partial t}$ angesetzt; also wäre Gleichung (9) zu erweitern:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \varrho f \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \longrightarrow \varrho f \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + r_a \frac{\partial y}{\partial t} = - E\Theta \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$$

Die innere Reibung mit dem Faktor r_i ist nach MUTO proportional der Deformationsgeschwindigkeit wie in Gleichung (107), so daß zu ersetzen ist: $E \longrightarrow E(1 + r_i \frac{\partial}{\partial t})$.
Dann lautet die Schwingungsgleichung:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{r_a}{\varrho f}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{E\Theta}{\varrho f}\frac{\partial^4}{\partial x^4}\left(1 + r_i \frac{\partial}{\partial t}\right) y = 0 \qquad (110)$$

Er löst sie mit dem Produktansatz (10) und behandelt den zeitabhängigen Teil wie beim harmonischen Oszillator, wobei er auf den Dämpfungsausdruck kommt:

$$2\delta = \frac{r_a}{\varrho f} + r_i \omega_o^2 \qquad (110a)$$

Dem entspricht nach (105) der Dämpfungsfaktor:

$$d = \frac{r_a}{\varrho f \omega_o} + r_i \omega_o \qquad (110b)$$

WAGNER[75] bekommt aus der Zeitabhängigkeit (12) für die äußere Dämpfung den Dämpfungsfaktor:

$$\varrho f \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + r_a \frac{\partial y}{\partial t} = (\varrho f \cdot i\omega_0 + r_a)\frac{\partial y}{\partial t} = i\omega_0 \varrho f \left(1 + \frac{r_a}{i\omega_0 \varrho f}\right)\frac{\partial y}{\partial t} =$$

$$\varrho f \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + r_a \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega_0^2 \varrho f \left(1 - \frac{i r_a}{\omega_0 \varrho f}\right) \cdot y = -\omega_0^2 \varrho f \left(1 - i d_a\right) \cdot y(t)$$

$$d_a = \frac{r_a}{\varrho f \omega_0} \quad , \qquad (110c)$$

die innere ist durch $E \longrightarrow E(1 + i d_i)$ berücksichtigt. -

Innere und äußere Dämpfung führen entweder zum komplexen E-Modul oder zu komplexen Eigenwerten in Gleichung (14):

$$-E \cdot (1 + i d_i) \cdot \Theta \cdot k_n^4 = -\omega_n^2 \cdot \varrho f (1 - i d_a)$$

$$\frac{E\Theta}{\varrho f} \frac{(1 + i d_i)}{(1 - i d_a)} \cdot k_n^4 = \omega_n^2$$

Komplexer E-Modul: $\bar{E} = E'\left[1 + i(d_i + d_a)\right]$ (110d)

Komplexe Eigenwerte: $\bar{k}_n^4 = \omega_n^2 \cdot \frac{\varrho f}{E\Theta}\left[1 - i(d_i + d_a)\right]$

$$\bar{k}_n = k_n \sqrt[4]{1 - i(d_i + d_a)} \qquad (110e)$$

HORIO[27] bekommt mit dem Voigt-Kelvin-Modell eine Biegeschwingungs-Differentialgleichung, deren Herleitung in Analogie zur elementaren Biegeschwingungstheorie gezeigt werden soll:

Statt (1) ist (107) zu benutzen: $\sigma = E\varepsilon + \eta \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$, so daß jetzt aus (3) wird:

$$D = \int_{-r}^{r} y \cdot E\varepsilon \, df + \int_{-r}^{r} y \cdot \eta \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \, df = \frac{E}{r_{kr}} \int y^2 df + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\eta}{r_{kr}} \int y^2 df$$

$$D = -E\Theta \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \eta\Theta \frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial t} \quad ,$$

weil nur der Krümmungsradius (4) zeitabhängig ist. Schließlich erhält man statt (9) die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{E\Theta}{\varrho f} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\eta\Theta}{\varrho f} \frac{\partial^5 y}{\partial x^4 \partial t} = 0 \qquad (111)$$

Die Lösung erfolgt wie bei der einfachen Theorie, jedoch mit komplexen Eigenwerten $\bar{k}_n^4$. HORIO benutzt einen Stab mit bewegtem eingespanntem Ende. In seiner nur äußerst kurz dargestellten Rechnung tritt beim Absolutquadrat der komplexen Amplitude ein Fehler in höheren Gliedern auf, den auch ZELENEV[77] übernimmt. - Hier wurde die Rechnung auch für einen Stab mit freien Enden durchgeführt, deren wesentliche Ergebnisse mit denen HORIOs übereinstimmen. Auf eine Wiedergabe der Berechnungen, die einigermaßen umfangreich sind, wird verzichtet. -
Die Beziehung zwischen Dämpfungsfaktor d und Halbwertsbreite (105) bleibt gültig. -

RETTING[59] beschreibt das Schwingungsverhalten eines Maxwell-Modells durch den Ansatz sinusförmiger Spannung und Dehnung:

$$E_o \cdot \dot{\varepsilon}(t) = \dot{\sigma}(t) + \frac{\sigma(t)}{\tau_R}$$

$$\sigma = \sigma_o \cdot e^{i\omega t} \qquad \text{und} \qquad \varepsilon = \varepsilon_o \cdot e^{i\omega t}$$

Dies eingesetzt ergibt:

$$E_o \cdot i\omega \cdot \varepsilon_o \cdot e^{i\omega t} = i\omega \cdot \sigma_o \cdot e^{i\omega t} + \frac{\sigma_o}{\tau_R} \cdot e^{i\omega t}$$

$$i\omega \cdot E_o \varepsilon_o = \sigma_o \left(i\omega + \frac{1}{\tau_R} \right) = \frac{\sigma_o}{\tau_R} \left(i\omega\tau_R + 1 \right)$$

$$i\omega\tau_R \cdot E_o \varepsilon_o = \sigma_o \left(1 + i\omega\tau_R \right)$$

$$\sigma_o = E\varepsilon_o \cdot \frac{i\omega\tau_R}{1 + i\omega\tau_R}$$

So beträgt das zeitabhängige Spannungs-Dehnungs-Verhältnis:

$$\frac{\sigma(t)}{\varepsilon(t)} = \frac{\sigma_o \cdot e^{i\omega t}}{\varepsilon_o \cdot e^{i\omega t}} = E_o \cdot \frac{i\omega\tau_R}{1 + i\omega\tau_R}$$

$$\frac{\sigma(t)}{\varepsilon(t)} = E_o \left(\frac{\omega^2\tau_R^2}{1 + \omega^2\tau_R^2} + \frac{i\omega\tau_R}{1 + \omega^2\tau_R^2} \right) = E_o \frac{\omega^2\tau_R^2}{1 + \omega^2\tau_R^2} \left(1 + \frac{i}{\omega\tau_R} \right) = E' + iE'' \qquad (112)$$

Für Beanspruchungszeiten, die klein gegen die Relaxationszeit τ_R sind, entsprechen sich danach Spannungs-Dehnungs-

Verhältnis und Realteil E' des E-Moduls. Beide steigen mit der Frequenz von Null auf E_o an und beschreiben damit qualitativ die Tatsache, daß der E-Modul von Polymeren mit der Frequenz zunimmt. -

Mit der Maxwellschen Relation (108) erkennt man, daß die Dämpfung hier eine andere Form hat als beim Voigt-Kelvin-Modell:

$$E' + iE'' = E'(1 + id) = E'\left(1 + \frac{i}{\omega \cdot \frac{\eta}{E_o}}\right) \qquad (112a)$$

$$d_M \triangleq \frac{E_o}{\omega \eta} \qquad (113\ )$$

Sie nimmt mit der Frequenz ab, wie man es auch tatsächlich bei Polymeren oberhalb der Dispersionsgebiete findet. -

Dagegen ist nach der Differentialgleichung (111) beim Voigt-Kelvin-Modell zu setzen:

$$E' + iE'' = E'(1 + id) = E'\left(1 + i\omega \frac{\eta}{E_o}\right) \qquad (111a)$$

$$d_{VK} = \frac{\omega \eta}{E_o} \qquad (113a)$$

So nimmt die Dämpfung mit der Frequenz zu, wie bei Polymeren unterhalb der Dispersionsgebiete und bei den üblichen Ansätzen einer der Geschwindigkeit proportionalen Reibung. -

4. Einfluß der Dämpfung auf die Resonanzfrequenz

Die Dämpfung verschiebt - je nach dem betrachteten Dämpfungsmodell - die Lage der experimentell gemessenen Resonanzfrequenz ν_r gegenüber der Resonanzfrequenz ν_o der ungedämpften Schwingung, die Grundlage der Berechnung des E-Moduls ist. Daher muß ihr Einfluß bei sorgfältigen Berechnungen prinzipiell beachtet werden. -

Die Verschiebung ist im allgemeinen bei freier und erzwun-

gener Schwingung verschieden groß (harmonischer Oszillator; nach HECKEL[20] auch bei den viskoelastischen Modellen); hier interessiert nur die letztere. -

Beim harmonischen Oszillator gilt wegen (104, 105):

$$\omega_0^2 = \omega_r^2 + 2\delta^2 = \omega_r^2\left(1 + \frac{2\delta^2}{\omega_r^2}\right) \cong \omega_r^2\left(1 + \frac{1}{2}d^2\right)$$

$$\nu_0^2 = \nu_r^2\left(1 + \frac{1}{2}d^2\right)$$

und der Realteil E' des E-Moduls, berechnet mit ν_r nach (17, 18) ist zu korrigieren:

$$E' = E(\nu_r^2)\cdot\left(1 + \frac{4}{8}d^2\right) \qquad (114)$$

Im Fall des Voigt-Kelvin-Modells ist entsprechend HORIO[27] und eigener Rechnung zu berücksichtigen:

$$E' = E(\nu_r^2)\cdot\left(1 + \frac{1}{8}d^2\right) \qquad (114a)$$

Für Frequenzen, die groß gegen die reziproke Relaxationszeit τ_R sind, ergibt sich beim Maxwell-Modell mit komplexen Eigenwerten in Anlehnung an die Berechnung zu (114a):

$$E' = E(\nu_r^2)\cdot\left(1 - \frac{7}{8}d^2\right) \qquad (114b)$$

BECKER[1] bekommt aus einer Integraldarstellung des Relaxationszeit-Spektrums eine Frequenzkorrektur:

$$\nu_0 = \nu_r \frac{\sqrt{1 - \frac{3}{8}d^2 + \frac{d^4}{256}}}{\left(1 + \frac{d^2}{16}\right)^2} \approx \nu_r\cdot\left(1 - \frac{3}{16}d^2\right)\left(1 - \frac{2}{16}d^2\right) = \nu_r\cdot\left(1 - \frac{5}{16}d^2\right)$$

und daher: $$E' = E(\nu_r^2)\cdot\left(1 - \frac{5}{8}d^2\right). \qquad (114c)$$

Zum Vergleich die Faktoren für eine frei abklingende Schwingung: beim harmonischen Oszillator $\left(1 + \frac{2}{8}d^2\right)$; nach GLAUZ[13])

von δ auf d umgerechnet mit (113, 113a) beim Voigt-Kelvin-Modell $\left(1 - \frac{2}{8} d^2\right)$ und beim Maxwell-Modell $\left(1 - \frac{4}{8} d^2\right)$. -

Da die Frequenzverschiebungen unter dem Einfluß der Dämpfung bei einigen Modellen positiv, bei anderen negativ sind, und da das wirkliche Verhalten der Polymeren jedenfalls nach HECKEL[21] zwischen dem des Voigt-Kelvin- und dem des Maxwell-Modells liegt, da aber auch - zumindest im Bereich oberhalb der Glastemperatur, und deshalb bei höheren Dämpfungen von $d > 0.1$ - nach dem Bild von SLONIMSKY[64] der harmonische Oszillator als Modell nicht völlig zu verwerfen ist, kann man davon ausgehen, daß die erforderliche Korrektur gering ist. -
Bei $\left(1 \pm \frac{2}{8} d^2\right)$ etwa macht sie für $d = 0.1$ nur 0.25 %, für $d = 0.2$ nur 1 % aus, so daß es vertretbar ist, sie im Bereich der hier ausgeführten Messungen zu vernachlässigen. -

Daher war es möglich, alle E-Moduln der untersuchten PMMA-Stäbe nach Formel (18) ohne Dämpfungskorrektur, jedoch mit den nach der exakten Theorie bestimmten Eigenwerten M_n' zu berechnen. -

VI. Meßergebnisse und Auswertung

1. Gültigkeit der entwickelten Theorie

Die Brauchbarkeit der in den vorigen Abschnitten hergeleiteten Theorie wurde zunächst an einem Aluminiumstab mit verschiedenen Zusatzmassen (s.S. 19) bei 24° C geprüft. Mit dem Wert m = 0.34 der Poissonkonstanten[40] wurden die Eigenwerte M'_n nach der exakten Theorie aus (83a,b) ausgerechnet, zum Vergleich auch über die einfache Theorie nach (48a,b). Die sich aus beiden Eigenwertsätzen mit Gleichung (18) ergebenden E-Moduln sind in Darstellung (G 13) wiedergegeben. -

Danach nimmt bei der einfachen Theorie der E-Modul mit zunehmender Schwingungsordnung erheblich ab, mit zunehmender Relativmasse P_R, also schwereren Übertragungsringen an den Stabenden schwach zu.
Diese Tendenzen ergeben sich aus der Änderung der Wellenlänge in beiden Fällen: höhere Oberschwingungen entsprechen kürzeren Wellenlängen, größere Zusatzmassen dagegen - ähnlich wie eine Verlängerung der Stäbe bei konstantem Durchmesser - längeren Wellenlängen, und damit einer besseren Annäherung an die Voraussetzungen der einfachen Theorie. -

Andererseits liegen alle nach der erweiterten Theorie berechneten E-Moduln innerhalb von etwa $\pm$ 0.3 % um einen Mittelwert von $E = 6.83 \cdot 10^{11} \frac{dyn}{cm^2}$, so daß die Gültigkeit der Theorie in diesem Fall hervorragend bestätigt

ist. - Ein Vergleichswert von GOENS[18] für Al-Einkristalle, die nur geringe elastische Anisotropie zeigen, beträgt: $E = 6.45 \ldots 7.45 \cdot 10^{11} \frac{dyn}{cm^2}$. -
Im hier untersuchten Intervall von etwa 900 bis 12 500 Hz tritt eine Frequenzabhängigkeit nicht in Erscheinung.

Als nächste Prüfung wurde der E-Modul von PMMA bei 25° C ermittelt. Dazu wurden die auf S. 20 beschriebenen Stäbe in folgenden Schwingungsordnungen erregt:

PMMA 11 :	n = 0 ... 5	(6 Meßwerte)
12 :	n = 0 ... 4	(5 ")
13 :	n = 0 ... 2	(3 ")
14 :	n = 0 ... 1	(2 ")
15 :	n = 0 ... 1	(2 ")
16 :	n = 0 ... 3	(4 ")
17 :	n = 0 ... 5	(6 ")
18 :	n = 0 ... 8	(9 ")
19 :	n = 0	(1 ")
20 :	n = 0 ... 5	(6 ")
21 :	n = 0 ... 5	(6 ")
22 :	n = 0 ... 8	(9 ")
23 :	n = 0 ... 1	(2 ")

Alle Messungen erfolgten zwischen etwa 24.0° und 26.0° C, und die Meßfrequenzen wurden entsprechend dem frequenzabhängigen Temperaturkoeffizienten auf 25° C umgerechnet. Die daraus nach der exakten Theorie mit $m = 0.40$ (ausgezogene Kurven) und nach der elementaren (gestrichelte Kurven) berechneten E-Moduln wurden abhängig von der Meßfrequenz dargestellt in (G 14). -

Für die vier höchsten Meßpunkte, die als "scheinbare Maxima" gemessen worden waren, gilt der Hinweis auf S. 33; sie enthalten Meßfehler und müssen tiefer liegen. -

Davon abgesehen sind alle Messungen nach der exakten Theorie höchstens $\pm$ 1.5 % vom jeweiligen Mittelwert entfernt. -

Im Gegensatz dazu weichen die als Ergebnisse der einfachen Theorie errechneten E-Moduln bei höheren Frequenzen stark nach unten ab. Dabei liegen die Werte verschiedener Stäbe in allen Schwingungsordnungen auf gemeinsamen Kurven, wenn der Stabradius konstant bleibt: auch hier ist also das Verhältnis von Stabdurchmesser zu Wellenlänge für die Abweichung maßgeblich, die bei den kürzesten Wellenlängen der Stäbe PMMA 11 - 15 übrigens mehr als ein Drittel des exakten E-Moduls beträgt. -

So zeigt sich an den beiden Meßreihen (G 13, 14) die Brauchbarkeit der exakten Theorie überzeugend. Daher konnte sie zur Ermittlung des elastothermischen Verhaltens von PMMA benutzt werden. -

2. Bedeutung des komplexen E-Moduls

Der komplexe Elastizitätsmodul E^* setzt sich nach (106) zusammen aus $E^* = E' + iE'' = E' + idE'$ mit $d = \frac{E''}{E'}$. Seinen Realteil E' errechnet man aus der Resonanzfrequenz nach (18); er ist ein Maß für die reversibel gespeicherte mechanische Energie (innere Energie oder Entropiearbeit). Der Imaginärteil E'' beschreibt die irreversibel umgewandelte mechanische Energie ("Verlustmodul"); sein Maximum liegt bei der Frequenz, die mit

der reziproken Relaxationszeit zusammenfällt[47]; man spricht davon, daß bei dieser Frequenz der Modul E' relaxiert[30]. Dort ist die Frequenzdispersion von E' am größten, daher auch die Bezeichnung "Dispersion" für E"[39]. -

Einer direkten Messung ist jedoch nur das Verhältnis d von umgewandelter zu gespeicherter Energie zugänglich; der Dämpfungsfaktor $d = \tan\delta = \frac{\Delta\nu}{\nu}$ gibt die Phasenverschiebung zwischen erregender Kraft und resultierender Stabschwingung an. -

Die Maxima von d und E" fallen nicht zusammen, denn E''_{max} ist gegenüber d_{max} in Richtung der Zunahme des Realteils E' verschoben[47]. -
Demnach mißt man bei konstanter Temperatur das Maximum von E" bei höherer Frequenz, bei konstanter Frequenz aber im Gebiet tieferer Temperaturen. -

Das Verhalten von Stoffen, bei denen die Frequenzverschiebung zwischen markanten Punkten (Maxima, Wendepunkte etc.) der Kurven E', d und E" temperaturunabhängig ist, bezeichnet man als "thermorheologisch einfach"[47]. -

3. Messung der viskoelastischen Größen

Zweckmäßig mißt man für jeden einzelnen Stab E' und d bei den verschiedenen erregbaren Schwingungsordnungen in Abhängigkeit von der Temperatur. Messungen an ver-

schiedenen Stäben mit jeweils konstanter, von der Raumtemperatur unter Umständen erheblich abweichender Temperatur sind wesentlich umständlicher.

Weil mit der Temperaturerhöhung ein Absinken des E-Moduls, und damit auch der einzelnen Resonanzfrequenzen einhergeht, sind Messungen bei konstanter Frequenz so nicht möglich. Ebenso mißt man die Dämpfungswerte d und über $d \cdot E' = E''$ auch den Verlustmodul bei sinkender Frequenz. Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß d und E" aus $\frac{\Delta\nu}{\nu}$ genaugenommen nur innerhalb eines Frequenzbandes mit Schwerpunkt bei der Resonanzfrequenz gemessen werden können. -

Für jeden Stab wurden die beiden dem schwach elliptischen Querschnitt entsprechenden Einzelresonanzen der verschiedenen Schwingungsordnungen bei einer Folge von Temperaturen aufgenommen, die im Bereich einiger Zehntel Grad um die folgenden "Meßtemperaturen" schwankten: -37°, -15°, $+5^{\circ}$, 25°, 45°, 65°, 85°, 95°, 103°, 109°, 115°, 123°, 128°, 133°, 140° C. -
Diese Werte ergeben sich aus reproduzierbaren "Heizstufen" der Vergleichswiderstände des Thermofühlers im elektrischen Ofen. Bei einigen Stäben wurden die Messungen auch mit kleineren Temperaturschritten durchgeführt, doch resultierten daraus für die Auswertung keine weiteren Erkenntnisse. -
Die höchste erreichbare Meßtemperatur hing stark von Stabdurchmesser und -länge ab (vgl. S. 28,29); bei den

beiden unterschiedlichsten Stäben betrug sie:

PMMA 15 ... 140^{o} ; PMMA 20 ... 90^{o} C. -

Durch die einzelnen in Abhängigkeit von der Temperatur gemessenen Resonanzfrequenzen wurden für jede Schwingungsordnung Kurven gelegt, aus denen die Werte bei den "Meßtemperaturen" zu entnehmen waren. Entsprechend S. 32 wurden dann aus den Frequenzdubletts Mittelwerte gebildet, aus denen sich mit den passenden Eigenwerten M_n' nach (18) die Moduln E' errechnen ließen. - Analog wurden die Dämpfungswerte d und daraus die Verlustmoduln E" bei den Meßtemperaturen bestimmt. -

So entstanden die folgenden Graphiken:

(G 15) für den Realteil E'(T) bei den Ordnungen n = 0, 1 des Stabes PMMA 15; zum Vergleich dazu die nach der einfachen Theorie berechneten Werte, die um etwa -18 % für n = 0 bezw. -38 % für n = 1 von denen der exakten Theorie abweichen,

(G 16) E'(T) für den Stab PMMA 20, bei dem sich die Ergebnisse beider Theorien mit n = 0 nur um 0.05 % unterscheiden, weil er die Bedingung "lang und dünn" erfüllt,

(G 18) mit dem Verlustfaktor d(T) beider Stäbe, wobei infolge der niedrigen Meßfrequenz von ca. 50 Hz bei PMMA 20 ein Nebenmaximum erkennbar ist,

(G 17) schließlich mit den Verlustmoduln E"(T) beider Stäbe, die deutliche, wegen der gleitenden Meßfrequenz aber sehr unsymmetrische Maxima zeigen. -

Derartige Darstellungen der Meßwerte sind jedoch wenig aussagekräftig, weil die Frequenz in nicht erkennbarem Maße zwischen den einzelnen Meßtemperaturen variiert. - Bei Messungen an Polymeren auf harter Unterlage ist die Frequenzverminderung infolge einer Erwärmung geringer, daher liegen beim Vergleich einer Probe auf harter Unterlage mit einer freien Probe[69] in der oben genannten graphischen Auftragung schließlich Meßwerte vor, deren einzelne Meßfrequenzen auch noch verschieden stark mit der Temperatur absinken. -

4. Auswertung der Messungen

Sinnvoll ist deswegen nur eine Parameterdarstellung der Meßergebnisse bei konstanten Frequenzen oder Temperaturen. So wurde aus den einzeln errechneten E-Moduln $E'(\nu,T)$ für verschiedene Temperaturen (G 19) gewonnen, bei der - wie allgemein üblich - Frequenz und E-Modul logarithmisch aufgetragen sind. -

Aus den einzelnen Dämpfungsmessungen ergeb sich $d(\nu)$ für verschiedene Temperaturen in (G 20). -
Die beiden Frequenzauftragungen (G 19, 20) stellen alle Meßergebnisse der vorliegenden Arbeit zusammenfassend dar; (G 14) ist eine Einzeldarstellung aus (G 19) in größerem Maßstab, bei der die auf S. 33 erwähnten Korrekturen noch nicht vorgenommen worden sind. -

Aus den durch die einzelnen Meßpunkte gelegten Kurvenscharen läßt sich dann der Verlustmodul $E''(\nu)$ für ver-

schiedene Temperaturen berechnen. Ihn zeigt (G 21). -

Ferner kann auch die Abhängigkeit der viskoelastischen Größen von der Temperatur mit der Frequenz als Parameter aus (G 19 - 21) entnommen werden, woraus sich die Darstellungen (G 22) für E'(T), (G 23) für d(T) und (G 24) für E"(T) ergeben. -

5. Fehler-Betrachtung

Die relativen Streufehler lassen sich am besten aus den Graphiken (G 14, 19, 20) ermitteln[1]. Danach beträgt die Genauigkeit der einzelnen Messungen von E' etwa:

$\Delta E' \leq \pm 1\ \%$ unterhalb 0° C

$\Delta E' \leq \pm 2\ \%$ unterhalb 70° C

$\Delta E' \leq \pm 5\ \%$ bis etwa 130° C.

Die Schwankungen beruhen auf Fehlern, die im Mittel (bis 70°) bei der Frequenzmessung $\Delta\nu = \pm 0.1\ \%$ und daher für $\Delta E_\nu = \pm 0.2\ \%$ ausmachen,
bei den Stababmessungen: Durchmesser auf 10^{-3} cm und Länge auf 10^{-2} cm genau, daher nach (18) wegen $E \sim l^3/r^4$ für die jeweils kürzesten Stäbe

PMMA 15: $\Delta E_a = \pm\sqrt{(0.07\cdot 4)^2 + (0.13\cdot 3)^2}\ \% = \pm 0.5\ \%$

PMMA 16: $\Delta E_a = \pm\sqrt{(0.17\cdot 4)^2 + (0.13\cdot 3)^2}\ \% = \pm 0.8\ \%$

PMMA 23: $\Delta E_a = \pm\sqrt{(0.5\cdot 4)^2 + (0.13\cdot 3)^2}\ \% = \pm 2.0\ \%$.

Außerdem hat die Temperaturmessung eine Unsicherheit von $\Delta T \approx \pm 0.2^\circ$ unterhalb der Glastemperatur T_G, darüber bis 0.5°. Ihr Fehler nimmt im Gegensatz zu dem der Längenmessung mit der Länge des Stabes zu, so daß sich beide in gewissem Maße ergänzen. - Auf den E-Modul wirkt sich

diese Ungenauigkeit, wie man aus der Steigung $\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_\nu$ in Darstellung (G 22) erkennt, unterhalb der Glastemperatur zu weniger als 0.25 %, oberhalb T_G höchstens zu etwa 3.5 % aus. -

Damit dominiert unterhalb T_G der geometrische Fehler; darüber sind Schwankungen bis etwa 4 % denkbar - in Übereinstimmung mit den oben angegebenen Streufehlern. - Je nach der Anzahl der Meßpunkte bei den einzelnen Temperaturen oder Frequenzintervallen sind die Kurven entsprechend genauer.

Ein systematischer Fehler resultiert hauptsächlich aus der Näherung m = 0.40 für die Poissonkonstante. Die mit m = 0.32 und m = 0.50 errechneten E-Moduln weichen von denen mit m = 0.40 im ungünstigsten Fall um 1.5 % ab (vgl. S. 91). Außerdem macht der Korrekturfaktor $(1+\alpha\cdot\delta T)^{-1}$ nach (G 2) oberhalb der Glastemperatur etwa 1 % aus. -

So dürfte die Genauigkeit der Kurven unterhalb T_G bei $\Delta E = \pm 2$ % liegen; darüber in ungünstigen Fällen bei $\Delta E = \pm 5$ %. Besonders durch Ausschaltung der beiden letzten Fehler ließe sich die Unsicherheit noch verringern; in dem Maße aber, in dem höhere Anforderungen an die Genauigkeit von m gestellt werden, geht die erweiterte Theorie der Biegeschwingungen aus der "Quasi-Einkonstanten-Form" in die Zwei-Konstanten-Form über. -

Erheblich stärker streuen die einzelnen Dämpfungsmessungen, teilweise bis zu 15 %. Die Kurven in (G 20) dürften auf 5 - 10 % genau sein. -

Während die Messungen des Realteiles E' zumindest unterhalb T_G genauer sind als sonst in der Literatur angegeben, so etwa BECKER[1)] mit 3 % im Mittel, in ungünstigen Fällen 10 %; FEDORENKO[6)] mit 3 - 5 %; halten sich die Dämpfungsmessungen im üblichen Rahmen. Bei Dämpfungswerten d > 0.1 werden gelegentlich Korrekturen an der Formel $d = \frac{\Delta\nu}{\nu}$ angebracht[1, 33, 77)]. -

6. Diskussion der Meßergebnisse

Aus (G 19, 22) ist zu entnehmen, wie der Realteil E' des komplexen Elastizitätsmoduls von PMMA mit einem mittleren Molekulargewicht $\bar{M} = 2.4 \cdot 10^6$ g/Mol mit der Frequenz zunimmt[59)] und mit der Temperatur abnimmt. Ähnliche Werte bekommt BECKER[1)], doch liegen die Moduln im oberen Frequenzbereich (kurze Biegewellenlängen) hier höher; womöglich, weil BECKER in diesem Bereich eine andere Methode (fortschreitende Biegewellen) benutzt hat, oder weil er Resonanzmessungen höherer Schwingungsordnung nach der elementaren Theorie ausgewertet hat. Die Messungen von KOPPELMANN[36)] bei Zimmertemperatur entsprechen den hier angegebenen ebenfalls. -

Auch die Dämpfungswerte (G 20, 23) gleichen etwa denen von[1, 22, 36)], wobei allerdings die hier für ν = 50 Hz gemessenen Werte etwas unsicher sind, da sie aus Messungen an nur einem Stab folgen. So müßten die Maxima von d in (G 20) unterhalb von 45° C möglicherweise bei tieferen Frequenzen liegen. -
Man erkennt in (G 20), wie sich das Dämpfungsmaximum

mit der Temperatur zu höheren Frequenzen, also kürzeren Relaxationszeiten verschiebt; dies gilt für Relaxationsgebiete von Polymeren allgemein[37]. -

In (G 23) tritt bei Frequenzen bis 200 Hz ein Nebenrelaxationsgebiet im Bereich um 70° in Erscheinung, das mit höherer Frequenz im Hauptrelaxationsgebiet des Glasüberganges oberhalb von T_G = 100° C verschwindet. Letzteres entspricht dem Auftauen der Beweglichkeit von Segmenten der Hauptkette, ersteres einer Beweglichkeit der Ester-Seitengruppen des PMMA[47].

Mit Messungen nach anderen Methoden sind die Dämpfungswerte d aus Biegeschwingungsresonanzen nur dann vergleichbar, wenn sich die Beanspruchungsarten der Proben entsprechen. So ist zum Beispiel beim Vergleich mit Torsionsmessungen $d^G > d^E$ [30], und die Maxima $d^G_{max}(\nu)$ liegen bei erheblich tieferen Frequenzen als $d^E_{max}(\nu)$ [1]. - Wohl auch deswegen liegen die $d^G_{max}(\nu)$ bei Temperaturen unter 45° nach Torsionsmessungen von HEIJBOER[22] im Bereich tieferer Frequenzen als die hier angegebenen d^E. - Die Höhenschichtlinien-Darstellung der Dämpfung $d(\nu,T)$ nach[22] deckt sich im vergleichbaren Gebiet mit den aus den Darstellungen (G 20, G 23) zu entnehmenden Werten, da HEIJBOER in diesem Frequenzbereich Biegeschwingungsresonanzen auswertet. -

Der Verlauf des Imaginärteils E" ist in den Darstellungen (G 21, 24) wiedergegeben. Die Absolutwerte von $E''(\nu)$ stimmen unterhalb 100° C mit denen KOPPELMANNs[39]

überein; während jedoch bei ihm die Maxima mit zunehmender Temperatur immer schmaler und höher werden, nimmt ihre Breite bei konstanter Höhe nach den Messungen des Verfassers zu. -

Die Maxima $E''_{max}(\nu)$ liegen bei höheren Frequenzen als $d_{max}(\nu)$, die $E''_{max}(T)$ bei tieferen Temperaturen als $d_{max}(T)$, wie auch bei[31, 52]. -

Aus der Verschiebung von E''_{max} mit Temperatur und Frequenz kann man die Aktivierungsenergie molekularer Prozesse berechnen[39]. Allerdings bekommt man bei der üblichen Arrhenius-Auftragung von $\lg\nu$ gegen $1/T$ nur die "scheinbare Aktivierungsenergie" ΔU, weil eine Temperaturabhängigkeit $\Delta U(T)$ nicht berücksichtigt wird:

$$\frac{\partial \ln \nu}{\partial T} = \frac{\Delta U}{RT^2} \qquad (115)$$

$$\Delta\left(\ln \nu(E''_{max})\right) = -\frac{\Delta U}{R} \cdot \Delta\left(\frac{1}{T}\right) \qquad (115a)$$

Außerdem gilt dieser Ansatz nur für einen Einzelprozeß, während für die intramolekularen Umlagerungen im allgemeinen nicht einzelne Platzwechsel, sondern Folgen solcher Prozesse ursächlich sind[39]. -

Vielfach werden statt der Frequenzen $\nu(E''_{max})$, welche den reziproken Relaxationszeiten bei den Meßtemperaturen oder den Maxima im Relaxationszeit-Spektrum entsprechen, die Frequenzen $\nu(d_{max})$ logarithmisch gegen $1/T$ aufgetragen. Dies ist nur bei thermorheologisch einfachen Stoffen statthaft[47]. Wohl auch aus diesem Grunde differieren die Angaben für ΔU von PMMA in der Literatur

stark. So erhalten für die Aktivierung der Ester-Seitengruppen-Bewegung HEIJBOER[22] und DEUTSCH[4] ΔU = 18 kcal/Mol, BECKER[1] ΔU = 35.7 kcal/Mol, andere Autoren nach[1] bis zu 50.7 kcal/Mol. -

Die Frequenzen der Maxima $E''_{max}(\nu)$ aus (G 21) sind in (G 25) logarithmisch gegen 1/T aufgetragen, dabei ergibt sich aus der Geraden für Temperaturen oberhalb 65° C eine scheinbare Aktivierungsenergie

$$\Delta U \approx 15 \text{ kcal/Mol} .$$

Die Werte unterhalb 45° C sind nicht sicher, deshalb wurde die gestrichelte Gerade nicht zur Auswertung herangezogen. -

7. Schlußbemerkungen

Der Frequenzbereich der in der vorliegenden Arbeit aus Biegeschwingungsresonanzen bestimmten viskoelastischen Größen von PMMA umfaßt fast drei Zehnerpotenzen. Er reicht damit zur Ermittlung von "reduzierten Frequenzkurven" bezw. "master-Kurven" über einen viel weiteren Frequenzbereich aus[1, 37]. Da diese Darstellung für PMMA bereits aus der Literatur bekannt ist, wurde sie hier nicht angegeben. -

Messungen an Polymeren bis zur oberen hier erreichten Frequenzgrenze von 17 000 Hz wurden mit Biegeschwingungsresonanzen bisher nicht beschrieben. Da sie nur durch sehr kurze Biegewellenlängen erreichbar sind, muß die Auswertung nach der erweiterten Theorie erfol-

gen, deren Gültigkeit die Meßbeispiele demonstrieren. Mit einem anderen Frequenzgenerator und dickeren Stäben läßt sich die Grenze noch etwas erhöhen. -

Die untere Frequenzgrenze von etwa 40 Hz ist mit noch dünneren Stäben (Durchmesser < 0.2 cm bei etwa 23 cm Länge) ohne Änderung der Randbedingungen nicht mehr wesentlich zu unterschreiten. Dafür kommt eher die Verwendung größerer Zusatzmassen oder einseitig eingespannter Stäbe in Betracht, wobei letztere bei gleichen Abmessungen eine ungefähr um den Faktor 6 tiefere Grundschwingungs-Frequenz haben. -

Jedenfalls läßt sich so - insbesondere dank der erweiterten Biegeschwingungstheorie - ein sehr großes Frequenzintervall mit einer einheitlichen Meßmethode überstreichen. Dies ist ein großer Vorteil der Biegeschwingung, denn Messungen nach verschiedenen Methoden lassen sich nur bedingt miteinander kombinieren. -

Der Temperaturbereich, in dem Biegeschwingungsresonanzen erzeugt werden können, läßt sich bei kurzen, dicken Stäben bis weit über die Glastemperatur der Polymeren ausdehnen, wobei die Berechnungen jedoch nach der erweiterten Theorie ausgeführt werden müssen. Dies gilt für Stäbe, die horizontal in den Schwingungsknoten gelagert sind. -
Bei vertikaler Lagerung können auch längere, dünnere Stäbe über die Glastemperatur erhitzt werden, doch müssen sie am oberen Ende eingespannt sein. Daraus resul-

tieren Ungenauigkeiten, die auf S. 12 besprochen sind. - Auch bei der Verwendung einer harten Unterlage für die zu weich werdenden Proben sind Meßfehler nicht zu vermeiden. -
Deshalb wurde hier ausschließlich die zuerst genannte Methode, die sich durch geringstmögliche äußere Beeinflussung der Proben auszeichnet, angewandt. -

Ein wesentlicher Gesichtspunkt bei der Beschreibung des viskoelastischen Verhaltens von Polymeren ist die Abhängigkeit ihrer Eigenschaften vom Molekulargewicht. Wenn sie auch im Bereich hoher Molekulargewichte - wie in der vorliegenden Arbeit - nur sehr gering ist, wäre es doch prinzipiell wünschenswert, immer von gut fraktioniertem Material mit genau bekannter Molekulargewichtsverteilung auszugehen. Die Ungewißheit auf diesem Gebiet schränkt die Möglichkeiten, Messungen verschiedener Autoren zu vergleichen, ein. -

Die Fraktionierung der benötigten Stoffmengen und die Herstellung homogener Stäbe ist jedoch im Labormaßstab sehr schwierig, so daß auch hier technisch hergestellte PMMA-Stäbe benutzt wurden. -

Grundsätzlich sind bei Berücksichtigung dieser Voraussetzungen und Anwendung der hier entwickelten exakten Biegeschwingungstheorie einheitliche Messungen des Elastizitätsmoduls von Polymeren in einem weiten Temperatur- und Frequenzbereich mit hoher Präzision möglich. -

ALGOL-Programm zur Berechnung der Eigenwerte M_n' aus (83a,b)

```
'LIST'(LP)
'SEND TO'(ED, SEMICOMPFILE,.ALGOL)
'PROGRAM'(HFPW)
'OUTPUT'0 = LP0
'BEGIN'
  'COMMENT' EIGENWERTE FUER ALLE SCHWINGUNGSORDNUNGEN BIS  N
            UNTER BERUECKSICHTIGUNG DER SCHERSPANNUNGEN;

  'INTEGER' I, J, N;
  'REAL' ZA, ZB, V, R, L, U, MUEH, TRIA, TRIB, HYA, HYB,
         QA, QB, AA, AB, BA, BB, CA, CB, DA, DB, C, D;
  'ARRAY'DV[0:5], MA,MB[0:9];
  'BOOLEAN' Q;

  'PROCEDURE' DELETE;  'EXTERNAL';
  'PROCEDURE' DATENOW; 'EXTERNAL';
  'PROCEDURE' TIMENOW; 'EXTERNAL';
    SELECT OUTPUT(0);
  DATENOW; NEWLINE(1);
  TIMENOW; NEWLINE(1);

  N ← 8;
  R ← .3035; L ← 16.36;
  C← .021 860; D← 4.74530&-6;
  SPACE(32); WRITETEXT('('
                         PMMA 18
                              ')'); NEWLINE(1);

  DV[0]←.5; DV[1]←.1; DV[2]←.01; DV[3]←.001; DV[4]←.0001; DV[5]←.00001;

  'FOR' MUEH ← .30 'STEP' .10 'UNTIL' .50 'DO'
  'BEGIN'
  SPACE(22); WRITETEXT ('(' POISSONKONSTANTE%%MUEH%%=% ')');
  PRINT(MUEH,1,2); NEWLINE(2);
  U ← (7 + 14*MUEH + 8*MUEH↑2)/(3 + 3*MUEH);

  GERADE ORDNUNGEN:
  'BEGIN'
  V← 3; J← 0;
  ALPHA:
  I← 0; MA[J]← V;

  QA ← .125*(R/L*MA[J])↑2;
  AA ← SQRT(SQRT((QA*(1-U))↑2 + 1) - QA*(1+U));
  BA ← SQRT(SQRT((QA*(1-U))↑2 + 1) + QA*(1+U));
  CA ← SQRT((QA*(1-U))↑2 + 1) - QA*(1-U);
  DA ← SQRT((QA*(1-U))↑2 + 1) + QA*(1-U);
  TRIA ← BA*MA[J]/2; HYA ← AA*MA[J]/2;

  ZA ← (1 - C*D*MA[J]↑4 * DA/CA) * SIN(TRIA)/COS(TRIA) +
       BA/AA * (DA/CA - C*D*MA[J]↑4) *
       (EXP(HYA) - EXP(-HYA)) / (EXP(HYA) + EXP(-HYA)) +
       (1 + DA/CA) * (BA*C*MA[J] - D*MA[J]↑3/AA * SIN(TRIA)/COS(TRIA) *
       (EXP(HYA) - EXP(-HYA)) / (EXP(HYA) + EXP(-HYA)));

  GERADE FUNKTION:
  MB[J]← MA[J] + DV[I];
```

J = 0 ... N		Schwingungsordnung
R = 0.3035		Stabradius in [cm]
L = 16.36		Stablänge in [cm]
C =	$\frac{a}{M_n'}$	nach Gl. (45a)
D =	$\frac{b}{M_n'^3}$	nach Gl. (44a)
MUEH		Poissonkonstante m
U		nach Gl. (101)
V = 3		Intervallanfang
MA [J] , MB [J]		Eigenwert-Näherung
DV [I]		Intervallbreite
ZA, ZB		Funktionswerte nach Gl. (83a,b)

```
QB ← .125*(R/L*MB[J])↑2;
AB ← SQRT(SQRT((QB*(1-U))↑2 + 1) - QB*(1+U));
BB ← SQRT(SQRT((QB*(1-U))↑2 + 1) + QB*(1+U));
CB ← SQRT((QB*(1-U))↑2 + 1) - QB*(1-U);
DB ← SQRT((QB*(1-U))↑2 + 1) + QB*(1-U);
TRIB ← BB*MB[J]/2; HYB ← AB*MB[J]/2;

ZB ← (1 - C*D*MB[J]↑4 * DB/CB) * SIN(TRIB)/COS(TRIB) +
     BB/AB * (DB/CB - C*D*MB[J]↑4) *
     (EXP(HYB) - EXP(-HYB)) / (EXP(HYB) + EXP(-HYB)) +
     (1 + DB/CB) * (BB*C*MB[J] - D*MB[J]↑3/AB * SIN(TRIB)/COS(TRIB) *
     (EXP(HYB) - EXP(-HYB)) / (EXP(HYB) + EXP(-HYB)));

Q← ZB>0 'AND' ZA<0;
'IF' Q 'THEN'
'BEGIN'
'IF' I = 5 'THEN' 'GOTO' ERGEBNIS GERADE 'ELSE'
  'BEGIN'
    I← I+1;
    'GOTO' GERADE FUNKTION;
  'END';
'END';
MA[J]←MB[J]; ZA←ZB;
'GOTO' GERADE FUNKTION;

ERGEBNIS GERADE:
WRITETEXT('(' SCHWINGUNGSORDNUNG%%%N%= ')');
PRINT(J,1,0); NEWLINE(2);
PRINT(MA[J],2,5); SPACE(2); PRINT(ZA,0,10); SPACE(6);
PRINT(MB[J],2,5); SPACE(2); PRINT(ZB,0,10); NEWLINE(3);

V← ENTIER(MB[J])+1;
J← J+2;
'IF' J 'LE' N 'THEN' 'GOTO' ALPHA;
'END';
NEWLINE(3);

UNGERADE ORDNUNGEN:
'BEGIN'
V←5; J←1;
BETA:
I←0; MA[J]←V;

QA ← .125*(R/L*MA[J])↑2;
AA ← SQRT(SQRT((QA*(1-U))↑2 + 1) - QA*(1+U));
BA ← SQRT(SQRT((QA*(1-U))↑2 + 1) + QA*(1+U));
CA ← SQRT((QA*(1-U))↑2 + 1) - QA*(1-U);
DA ← SQRT((QA*(1-U))↑2 + 1) + QA*(1-U);
TRIA ← BA*MA[J]/2; HYA ← AA*MA[J]/2;

ZA ← (1 - C*D*MA[J]↑4 * CA/DA) * SIN(TRIA)/COS(TRIA) -
     AA/BA * (CA/DA - C*D*MA[J]↑4) *
     (EXP(HYA) - EXP(-HYA)) / (EXP(HYA) + EXP(-HYA)) +
     (1 + CA/DA) * (AA*C*MA[J] * SIN(TRIA)/COS(TRIA) *
     (EXP(HYA) - EXP(-HYA)) / (EXP(HYA) + EXP(-HYA)) +
     D*MA[J]↑3/BA);

UNGERADE FUNKTION:
MB[J]← MA[J] + DV[I];
```

```
  QB ← .125*(R/L*MB[J])↑2;
  AB ← SQRT(SQRT((QB*(1-U))↑2 + 1) - QB*(1+U));
  BB ← SQRT(SQRT((QB*(1-U))↑2 + 1) + QB*(1+U));
  CB ← SQRT((QB*(1-U))↑2 + 1) - QB*(1-U);
  DB ← SQRT((QB*(1-U))↑2 + 1) + QB*(1-U);
  TRIB ← BB*MB[J]/2; HYB ← AB*MB[J]/2;

  ZB ← (1 - C*D*MB[J]↑4 * CB/DB) * SIN(TRIB)/COS(TRIB) -
       AB/BB * (CB/DB - C*D*MB[J]↑4) *
       (EXP(HYB) - EXP(-HYB)) / (EXP(HYB) + EXP(-HYB)) +
       (1 + CB/DB) * (AB*C*MB[J] * SIN(TRIB)/COS(TRIB) *
       (EXP(HYB) - EXP(-HYB)) / (EXP(HYB) + EXP(-HYB)) +
       D*MB[J]↑3/BB);

  Q← ZB>0 'AND' ZA<0;
  'IF' Q 'THEN'
  'BEGIN'
    'IF' I = 5 'THEN' 'GOTO' ERGEBNIS UNGERADE 'ELSE'
    'BEGIN'
      I← I+1;
      'GOTO' UNGERADE FUNKTION;
    'END';
  'END';
  MA[J]← MB[J]; ZA← ZB;
  'GOTO' UNGERADE FUNKTION;

  ERGEBNIS UNGERADE:
  WRITETEXT('(' SCHWINGUNGSORDNUNG%%%N%= ')');
  PRINT(J,1,0); NEWLINE(2);
  PRINT(MA[J],2,5); SPACE(2); PRINT(ZA,0,10); SPACE(6);
  PRINT(MB[J],2,5); SPACE(2); PRINT(ZB,0,10); NEWLINE(3);

  V← ENTIER(MB[J]) + 1;
  J← J+2;
  'IF' J 'LE' N 'THEN' 'GOTO' BETA;
  'END';
  NEWLINE(4);
  'END';

TIMENOW; RUNOUT; DELETE;
'END'
```

Nach diesem Programm werden die Nullstellen der Gleichungen (83a,b) aufgesucht. Die linke Seite der Gleichungen wird als Funktionswert Z abhängig vom Argument M[J] berechnet. Ausgedruckt erscheinen für jede Schwingungsordnung die beiden Werte MA[J] und MB[J], zwischen denen die Nullstelle M'_n liegt. Die beiden Funktionswerte ZA und ZB haben verschiedenes Vorzeichen; sie geben an, welches der beiden Argumente die Nullstelle besser annähert. Eine Interpolation ist wegen des geringen Intervalls überflüssig. -

Bei Variation der Poissonkonstante m = 0.30, 0.40, 0.50 ändern sich, wie man auch an diesem Beispiel erkennt, die Eigenwerte nur wenig. -

Die jeweils unterstrichenen Argumente sind die gesuchten M'_n:

MA[J]	ZA		MB[J]	ZB
10/04/69 12/04/13				
		PMMA18 POISSONKONSTANTE	MUEH = 0.30	
SCHWINGUNGSORDNUNG N = 0				
4.54093	-6.57870077708 -6		4.54094	6.06932371748 -6
SCHWINGUNGSORDNUNG N = 2				
10.51445	-8.37669722398 -6		10.51446	8.26104587768 -6
SCHWINGUNGSORDNUNG N = 4				
16.34647	-2.12746817858 -5		16.34648	7.50071194498 -7
SCHWINGUNGSORDNUNG N = 6				
21.93282	-1.68485421458 -5		21.93283	1.27292005358 -5
SCHWINGUNGSORDNUNG N = 8				
27.22538	-3.03576525778 -5		27.22539	1.06256629818 -5
SCHWINGUNGSORDNUNG N = 1				
7.53122	-9.89283580578 -6		7.53123	9.61670593838 -7
SCHWINGUNGSORDNUNG N = 3				
13.45665	-5.79076004228 -6		13.45666	5.96353129378 -6
SCHWINGUNGSORDNUNG N = 5				
19.17423	-7.38080416348 -6		19.17424	5.48364550938 -6
SCHWINGUNGSORDNUNG N = 7				
24.61747	-4.49945218868 -6		24.61748	9.55632276608 -6

POISSONKONSTANTE MUEH = 0.40

SCHWINGUNGSORDNUNG N = 0

4.54065 -1.21284338098 -5 4.54066 5.19296008868 -7

SCHWINGUNGSORDNUNG N = 2

10.50948 -1.32262721318 -6 10.50949 1.53139080798 -5

SCHWINGUNGSORDNUNG N = 4

16.32711 -1.05911967698 -5 16.32712 1.14166905408 -5

SCHWINGUNGSORDNUNG N = 6

21.88706 -1.98511115748 -5 21.88707 9.63894126478 -6

SCHWINGUNGSORDNUNG N = 8

27.14172 -1.24657090058 -5 27.14173 2.81821558028 -5

SCHWINGUNGSORDNUNG N = 1

7.52953 -7.43199052528 -6 7.52954 3.43540887118 -6

SCHWINGUNGSORDNUNG N = 3

13.44591 -9.73727946998 -6 13.44592 2.05943069898 -6

SCHWINGUNGSORDNUNG N = 5

19.14319 -7.95535743248 -6 19.14320 4.99582165508 -6

SCHWINGUNGSORDNUNG N = 7

24.55409 -4.25413600178 -6 24.55410 9.94443689718 -6

POISSONKONSTANTE MUEH = 0.50

SCHWINGUNGSORDNUNG N = 0

4.54038	-1.70575367528 -5	4.54039	1.09416887438 -5

SCHWINGUNGSORDNUNG N = 2

10.50446	-1.53779692488 -5	10.50447	1.25716542248 -6

SCHWINGUNGSORDNUNG N = 4

16.30767	-6.35991455068 -7	16.30768	2.13549137708 -5

SCHWINGUNGSORDNUNG N = 6

21.84130	-1.34005822478 -5	21.84131	1.60039926418 -5

SCHWINGUNGSORDNUNG N = 8

27.05839	-3.81420832138 -5	27.05840	2.18443165078 -6

SCHWINGUNGSORDNUNG N = 1

7.52782	-1.06407387658 -5	7.52783	2.39604560198 -7

SCHWINGUNGSORDNUNG N = 3

13.43511	-9.33088449538 -6	13.43512	2.50879384118 -6

SCHWINGUNGSORDNUNG N = 5

19.11209	-3.99326381748 -7	19.11210	1.26395098058 -5

SCHWINGUNGSORDNUNG N = 7

24.49084	-6.65553670848 -7	24.49085	1.36761736948 -5

Zusammenfassung

Die Biegeschwingung isotroper stabförmiger Proben wird eingehend theoretisch behandelt mit dem Ziel, durch Auswertung auch der Resonanzfrequenzen höherer Schwingungsordnungen und durch Benutzung kurzer, dicker Stäbe den Temperatur- und Frequenzbereich bei der Messung des Elastizitätsmoduls E von Polymeren mit Biegeschwingungsresonanzen zu erweitern.

Nach ausführlicher Darstellung der elementaren, nur für lange, dünne Stäbe und niedrige Schwingungsordnungen gültigen Biegeschwingungstheorie - auch für den experimentell wichtigen Fall von Stäben mit translatorisch und rotatorisch trägen Zusatzmassen an den Enden und deren Einfluß auf Eigenwerte und Schwingungsknoten - wird eine erweiterte Differentialgleichung gelöst, die das Auftreten von Schubspannungen im gebogenen Stab sowie die rotatorische Trägheit der Stabelemente berücksichtigt. Es ergeben sich - für Stäbe mit Zusatzmassen besonders - komplizierte Eigenwertgleichungen, die außer E zwei andere Konstanten enthalten: eine weitere Elastizitätskonstante (Torsionsmodul G oder Poissonkonstante m) und die von der Form des Querschnitts abhängige Konstante κ.

Ausgehend von den allgemeinen Spannungs-Dehnungs-Beziehungen kann man über eine Integration der Schubspannungskomponenten im gebogenen Stab κ durch die Poissonkonstante m ausdrücken, so daß eine Zwei-Konstanten-Theorie der Biegeschwingung isotroper Stäbe entsteht. -

Messungen an Stäben aus Aluminium und Polymethylmethacrylat PMMA bestätigen die Gültigkeit der Theorie hervorragend. -

Weil $\varkappa$ mit μ nur geringfügig variiert, genügt eine grobe Näherung der Poissonkonstanten m zur Berechnung der Eigenwerte. Dadurch kann der E-Modul auch mit der erweiterten Theorie quasi als Einzelgröße sehr genau gemessen werden.

Da sich kurze, dicke Polymerstäbe ohne Gestaltänderung viel höher erhitzen lassen als lange, dünne, war es möglich, den E-Modul von PMMA im Bereich - 37° ... + 140° C zu bestimmen, d.h. bis 40° oberhalb der Glastemperatur. Die Messungen wurden - teilweise bis zur 8. Oberschwingung - bei Frequenzen von 40 bis 17 000 Hz vorgenommen; außerdem erfolgte eine genaue Bestimmung der temperaturabhängigen Dichte des Polymeren. -

Aus den Halbwertsbreiten der Resonanzkurven wird der Dämpfungsfaktor d bestimmt. Eine Betrachtung verschiedener Modelle der Schwingungsdämpfung in Polymeren zeigt, daß die Resonanzfrequenz erzwungener Schwingungen praktisch dämpfungsunabhängig ist. -

Real- und Imaginärteil des komplexen E-Moduls sowie der Dämpfungsfaktor d von PMMA werden in Abhängigkeit von Temperatur und Frequenz in den Bereichen - 37° ... 115° C und 50 ... 20 000 Hz graphisch dargestellt. -

Literaturverzeichnis

1) G.W.Becker, Koll.-Z. 140, 1-32 (1955)

2) G.A.Bernier; D.E.Kline, J.Appl.Polym.Sci. 12/3, 593-604 (1968)

3) D.R.Bland; E.H.Lee, J.Appl.Phys. 26,2, 1497-1503 (1955)

4) K.Deutsch; E.A.W.Hoff; W.Reddish, J.Polym.Sci. 13, 565-82 (1954)

5) A.Dietzel; E.Deeg, Glastechn. Berichte 27, 105 (1954)

6) A.G.Fedorenko; B.I.Panshin, Plast. Massy 11, 46 (1965)

7) A.Föppl, Vorlesungen üb. techn. Mechanik, Bd. 3, Festigkeitslehre, §§ 15,24,29, Leipzig (1920)

8) A.Föppl, Vorlesungen üb. techn. Mechanik, Bd. 4, Dynamik, §§ 39,40, Leipzig (1923)

9) F.Förster, Z.Metallkunde 29, 109-15 (1937)

10) F.Förster; W.Köster, Z.Metallkunde 29, 116-23 (1937)

11) S.Fuchs, Z.Ver.dt.Ing. 58, 1330-36 (1914)

12) H.Geiger; K.Scheel, Handbuch d. Physik, Bd. 6, Mechanik d. elastischen Körper, 359-63, Berlin (1928)

13) R.D.Glauz, J.Polym.Sci.Part A 1, 1693-1700 (1963)

14) E.Goens, Ann.Phys.(5) 4, 733-77 (1930)

15) E.Goens, Ann.Phys.(5)11, 649-78 (1931)

16) E.Goens, Ann.Phys.(5)15, 455-82 (1932)

17) E.Goens, Ann.Phys.(5)16, 793-809(1933)

18) E.Goens, Ann.Phys.(5)17, 233-42 (1933)

19) E.Goens, Ann.Phys.(5)38, 456-68 (1940)

20) K.Heckel, Rheologica Acta 6/2, 114-19 (1967)

21) K.Heckel, Rheologica Acta 7/1, 51-57 (1968)

22) J.Heijboer, Koll.-Z. 148, 36-47 (1956)

23) P.Heydemann, Koll.-Z.193, 12-15 (1963)

24) H.van Hoorn, J.Appl.Polym.Sci. 12/4, 871-88 (1968)

25) M.Horio; S.Onogi; C.Nakayama; K.Yamamoto, J.Appl.Phys. 22/2, 966-70 (1951)

26) M.Horio; S.Onogi, J.Appl.Phys. 22/2, 970-77 (1951)

27) M.Horio; S.Onogi, J.Appl.Phys. 22/2, 977-81 (1951)

28) W.Hort, Techn. Schwingungslehre § 90,Berlin (1922)

29) R.Houwink, Chemie u. Technologie d. Kunststoffe, 479-82, Leipzig (1954)

30) S.Kästner; G.Pohl, Koll.-Z. 191, 114-23 (1963)

31) S.Kästner; M.Jur,
Exp.Techn.d.Phys. 12, 358-63 (1964)

32) T.S.Kê, J.Appl.Phys. 20, 1226-31 (1949)

33) D.E.Kline, J.Polym.Sci. 22, 449-54 (1956)

34) H.O.Kneser, Ann.Phys.(6)8, 99-104 (1951)

35) H.O.Kneser, Z.Angew.Physik 3, 113-17 (1951)

36) J.Koppelmann, Koll.-Z. 144, 12-41 (1955)

37) J.Koppelmann, Kunststoffe 47, 416-24 (1957)

38) J.Koppelmann, Rheologica Acta 1, 20-28 (1958)

39) J.Koppelmann, Koll.-Z. 216/217, 6-25 (1967)

40) W.Köster; H.Franz,
Metallurgical Reviews 6, 1-55 (1961)

41) H.Lorenz, Lehrbuch d. techn. Physik,
Bd. 4, Techn. Elastizitätslehre, 435-45 (1913)

42) A.E.H.Love, A Treatise of the Mathematical Theory
of Elasticity, 318-63, New York (1944)

43) K.H.Maierhofer, Diplomarbeit,
I. Phys. Inst. FU Berlin (1957)

44) G.Meyerhoff; G.V.Schulz,
Makromolekulare Chemie 7, 294 (1952)

45) K.Muto, Z.Angew.Math.u.Mechanik 10, 346-53 (1930)

46) L.E.Nielsen, ASTM-Bull. 165, 48-52 (1950)

47) R.Nitsche; K.A.Wolf, Struktur und physikalisches
Verhalten der Kunststoffe,331-84,Berlin (1962)

48) A.W.Nolle, J.Appl.Phys. 19, 753-74 (1948)

49) H.Oberst; K.Frankenfeld,
Acustica 2, AB 181-94 (1952)

50) H.Oberst; L.Bohn; F.Linhardt,
Kunststoffe 51, 495-502 (1961)

51) H.Oberst, Phys.Verh.D.P.G. 4, 13-26 (1964)

52) H.Oberst, Koll.-Z. 216/217, 64-80 (1967)

53) W.P.van Oort, Microtechnic 7, 246 (1953)

54) B.I.Panshin; A.G.Fedorenko,
Plast.Massy 12, 60-62 (1966)

55) G.Pickett, Am.Soc.Testing Materials,
Proc. 45, 846-65 (1945)

56) G.Pohl; S.Kästner,
Exp.Techn.d.Phys. 12, 193-98 (1964)

57) H.Rauch-Puntigam; T.Völker, Acryl- und Methacryl-
verbindungen, 286, Berlin (1967)

58) J.W.S.Rayleigh, The Theory of Sound,
293-94, New York (1945)

59) W.Retting, Koll.-Z. 203, 108-15 (1965)

60) Z.Rigbi, Applied Polymer Symposia 5, 1-8 (1967)

61) D.W.Robinson, J.Scientific Instr. 32, 2 (1955)

62) G.Schreyer, Kunststoffe 55/5, 339-43 (1965)

63) G.Schreyer; P.Bauer, Kunststoffe 58, 93-100 (1968)

64) G.L.Slonimsky, J.Polym.Sci.Part C 16,1667-72(1967)

65) I.S.Sokolnikoff, Mathematical Theory of Elasticity, 213-17, New York (1956)

66) S.Spinner, J.Amer.Ceramic Soc. 37, 229 (1954)

67) S.Spinner, J.Amer.Ceramic Soc. 39, 113 (1956)

68) T.E.Stanton, ASTM-Bull. 131, 17-22 (1944)

69) L.Szilágyi; G.Locati; M.Pegoraro, Koll.-Z. 223/2, 97-104 (1968)

70) S.P.Timoschenko, Phil.Mag. 41, 744-46 (1921)

71) S.P.Timoschenko, Phil.Mag. 43, 125-31 (1922)

72) K.Ueberreiter, Z.Phys.Chem. B 45, 367-73 (1940)

73) K.Ueberreiter, Koll.-Z. 102, 272-91 (1943)

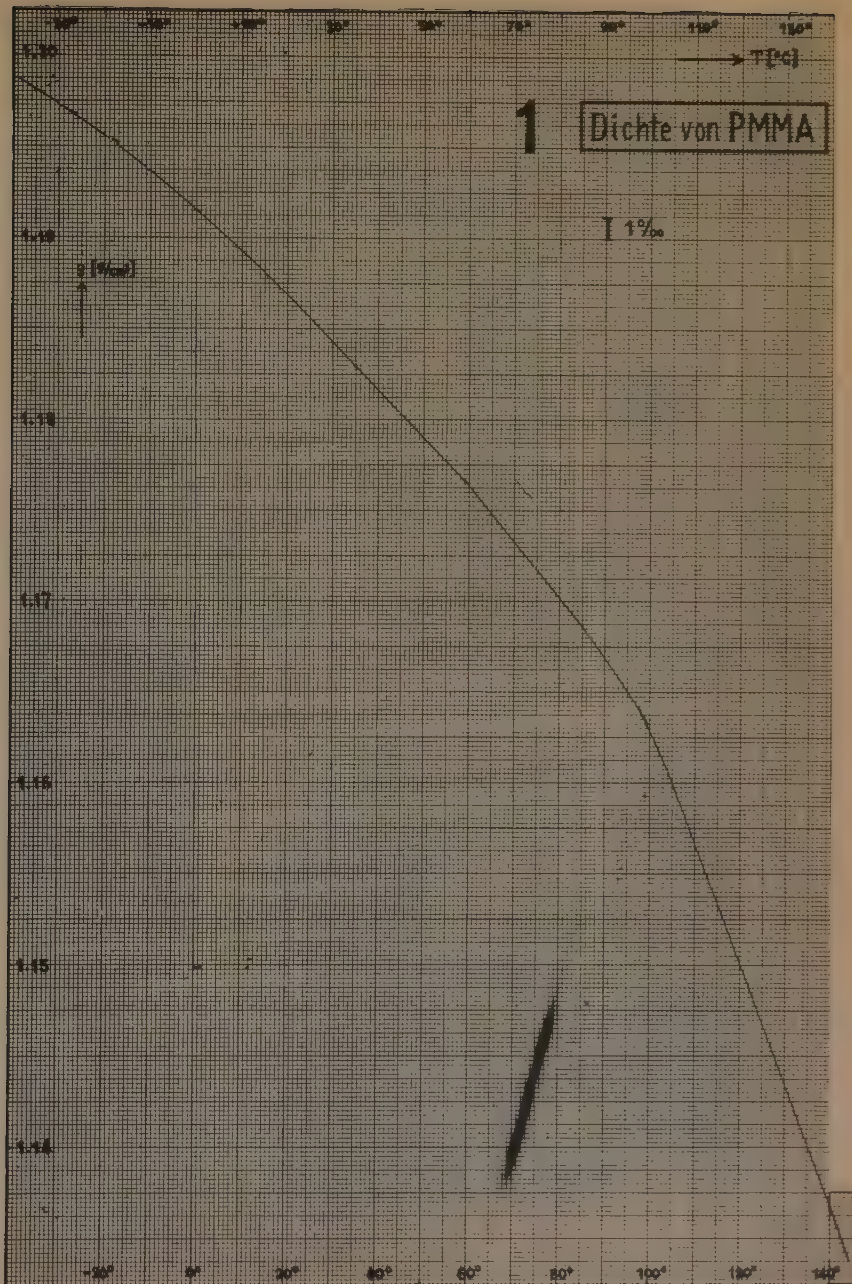
74) K.Ueberreiter; H.J.Orthmann, Kunststoffe 48, 525-30 (1958)

75) K.W.Wagner, Einführung in die Lehre von d. Schwingungen und Wellen, §§ 60,70, Wiesbaden (1947)

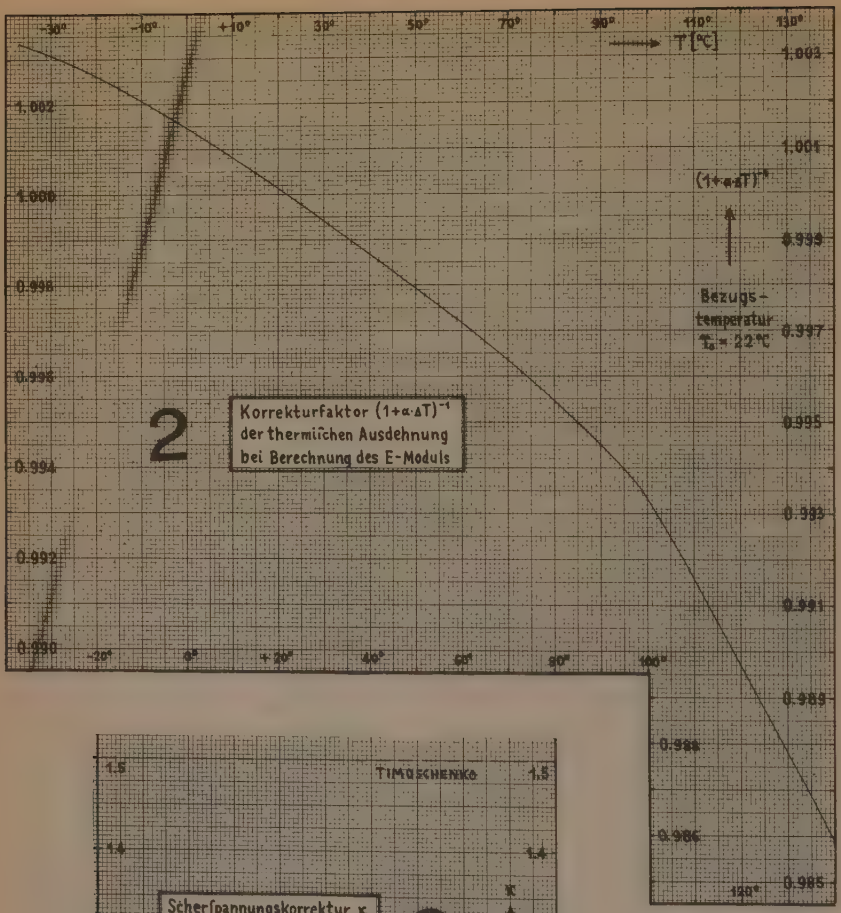
76) W.Wien; F.Harms, Handbuch der Experimentalphysik, Bd. 17 I, Schwingungs- und Wellenlehre, § 18, Leipzig (1934)

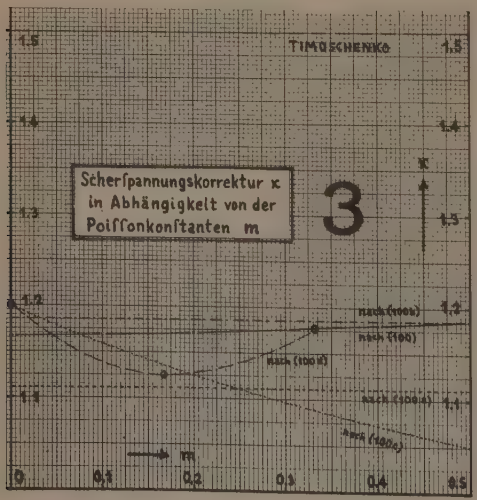
77) Y.V.Zelenev; G,M.Bartenev; G.K.Demishev, Zavodskaya Laboratoriya 29, 868-72 (1963)

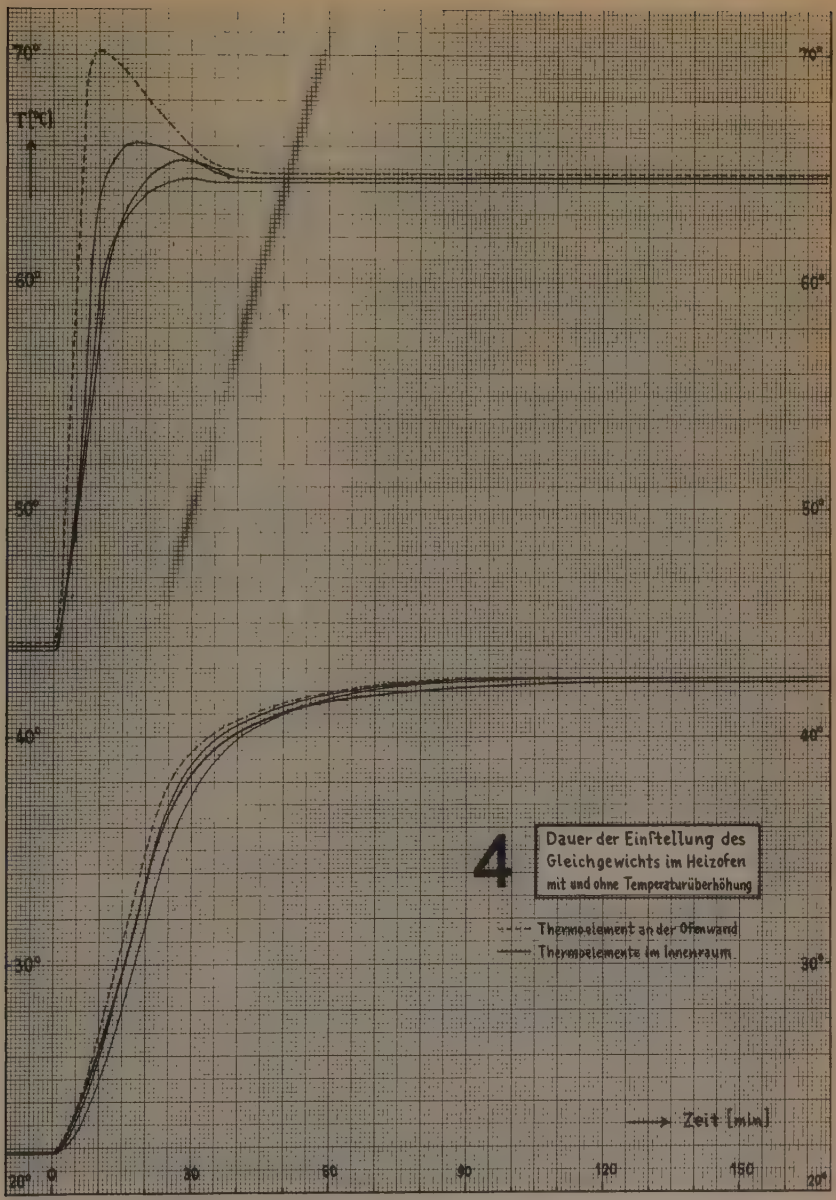
78) A.L.Zijlstra, Industrie-Elektronik 7, 11-14 (1959)



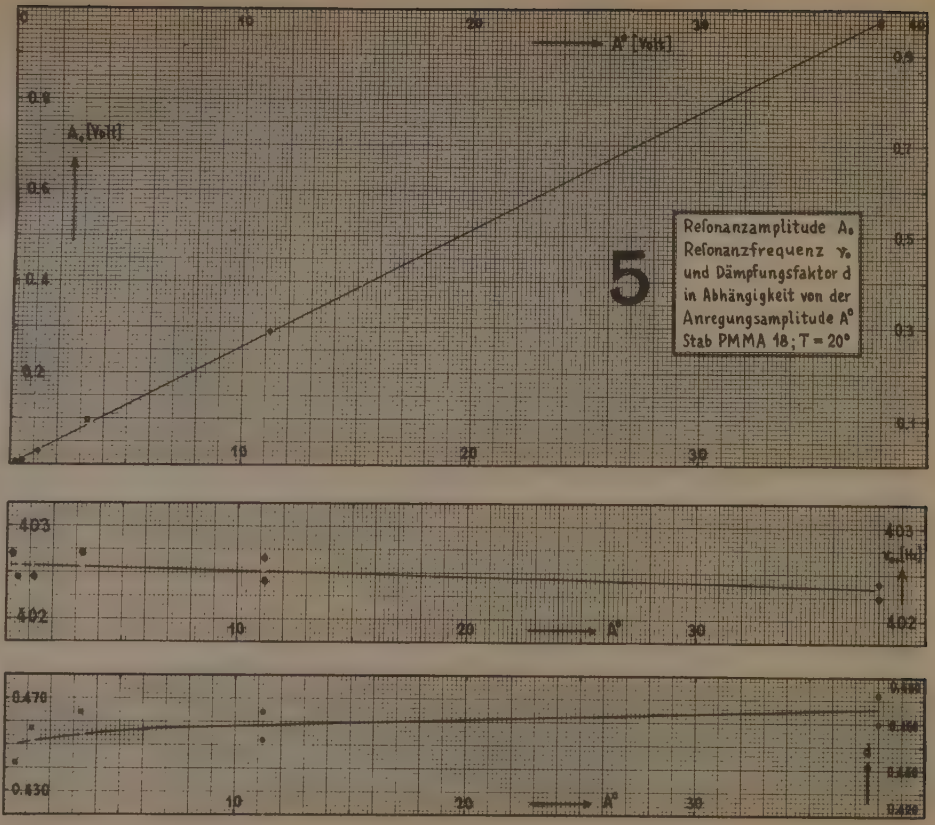
1
Dichte von PMMA
T[°C]
1‰
1.17
1.16
1.15
-20°
0°
20°
40°
60°
80°
100°
120°
140°

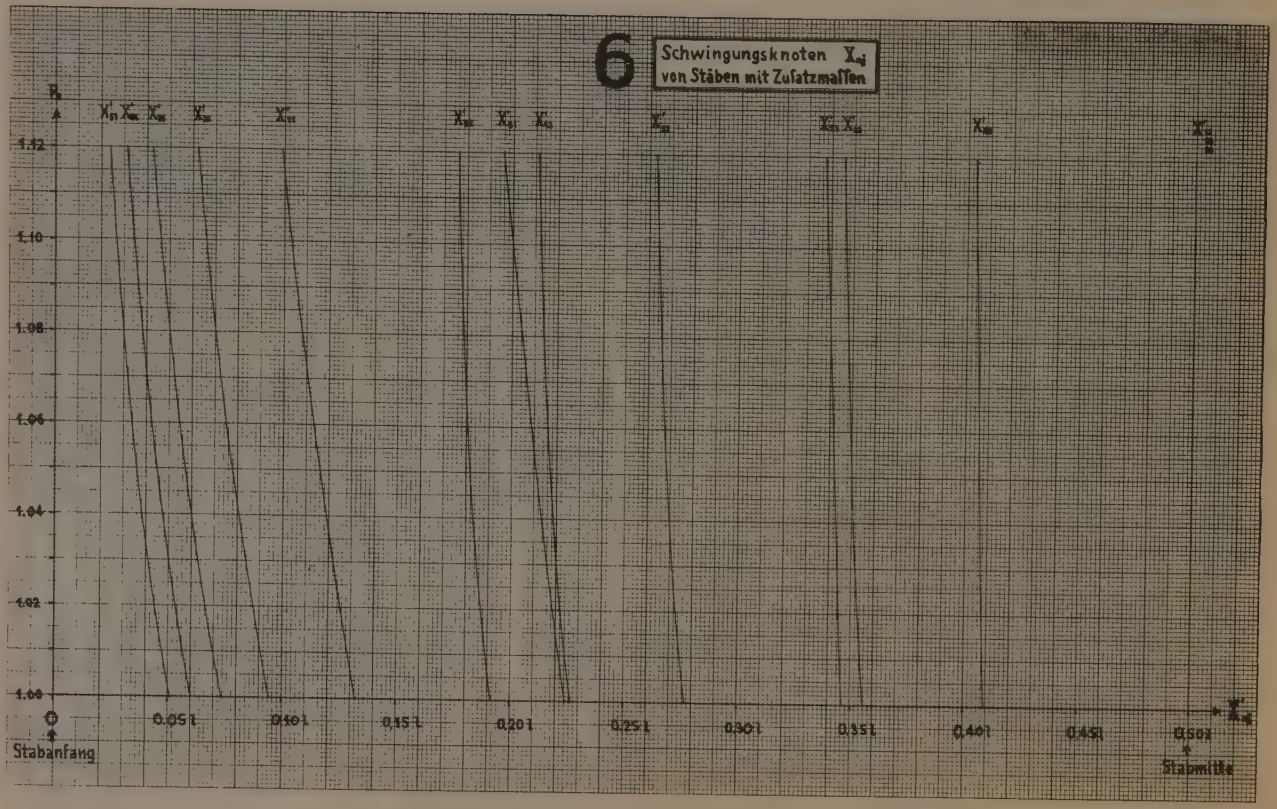

T [°C]
(1+α·ΔT)⁻¹
Bezugs-
temperatur
T₀ = 22°C
2
Korrekturfaktor (1+α·ΔT)⁻¹
der thermischen Ausdehnung
bei Berechnung des E-Moduls

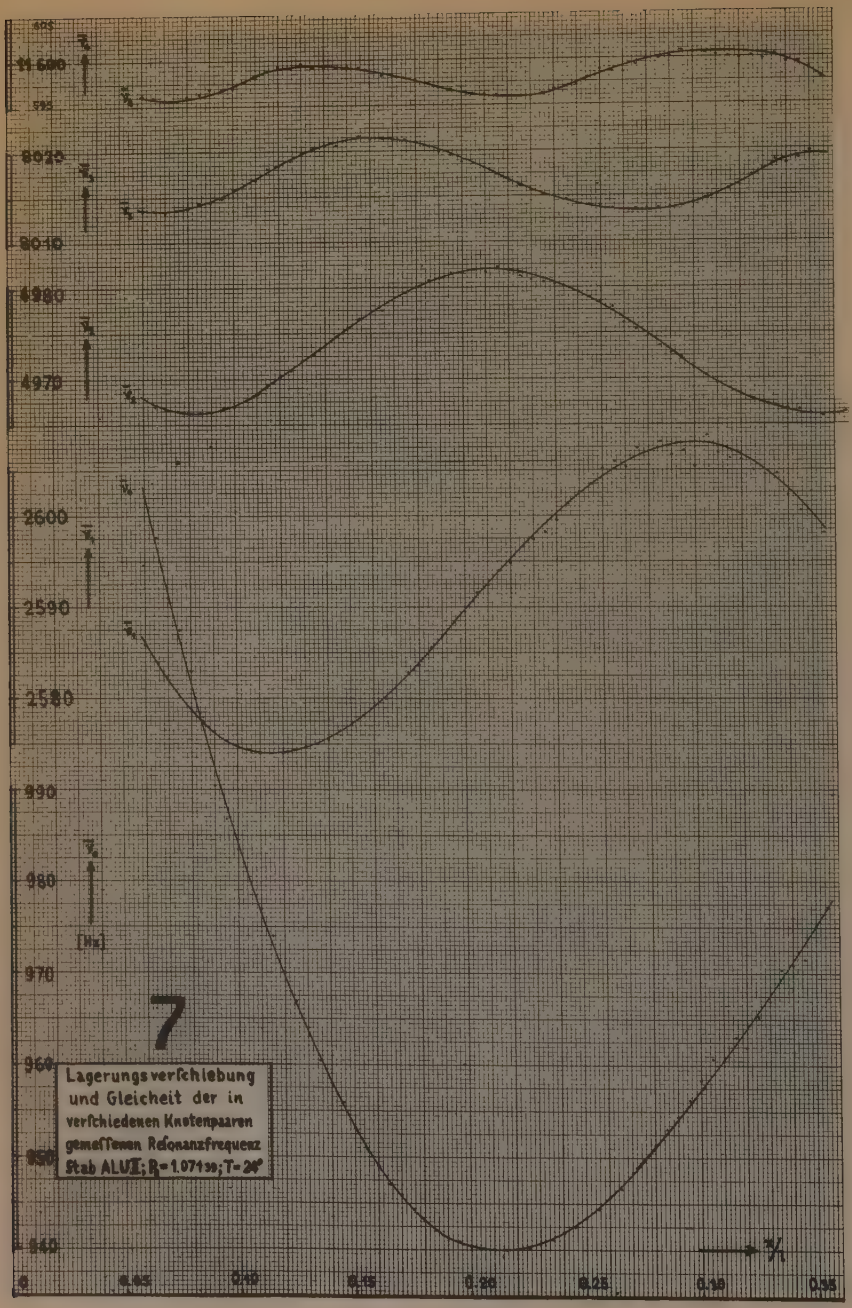

TIMOSCHENKO
Scherspannungskorrektur κ
in Abhängigkeit von der
Poissonkonstanten m
3
κ
m



4 Dauer der Einstellung des Gleichgewichts im Heizofen mit und ohne Temperaturüberhöhung

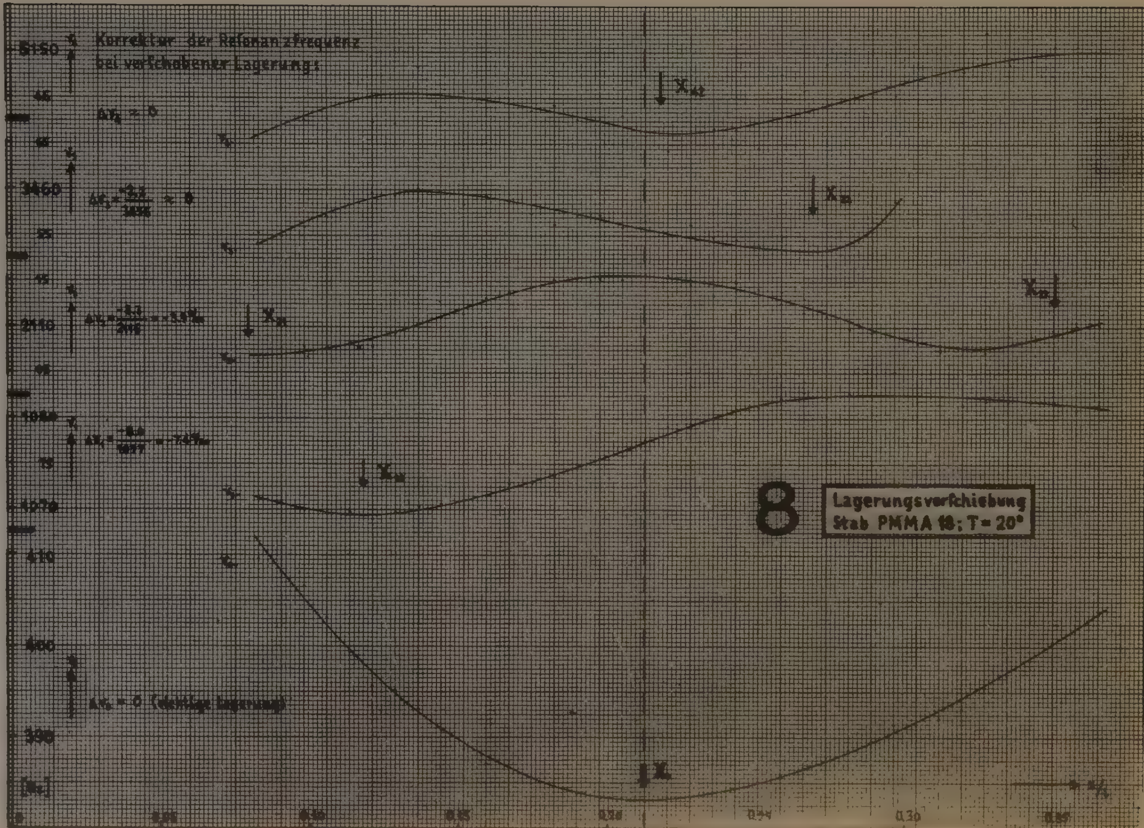

A° [Volt]
A_0 [Volt]
10
20
30
0.8
0.6
0.4
0.2
0.9
0.7
0.5
0.3
0.1
5
Resonanzamplitude A_0
Resonanzfrequenz ν_0
und Dämpfungsfaktor d
in Abhängigkeit von der
Anregungsamplitude A°
Stab PMMA 18; T = 20°
403
402
ν_0 [Hz]
0.470
0.430
d


6
Schwingungsknoten X_{ij}
von Stäben mit Zusatzmassen
β_k
1.12
1.10
1.08
1.06
1.04
1.02
1.00
0.05 l
0.10 l
0.15 l
0.20 l
0.25 l
0.30 l
0.35 l
0.40 l
0.45 l
0.50 l
x_k
Stabanfang
Stabmitte



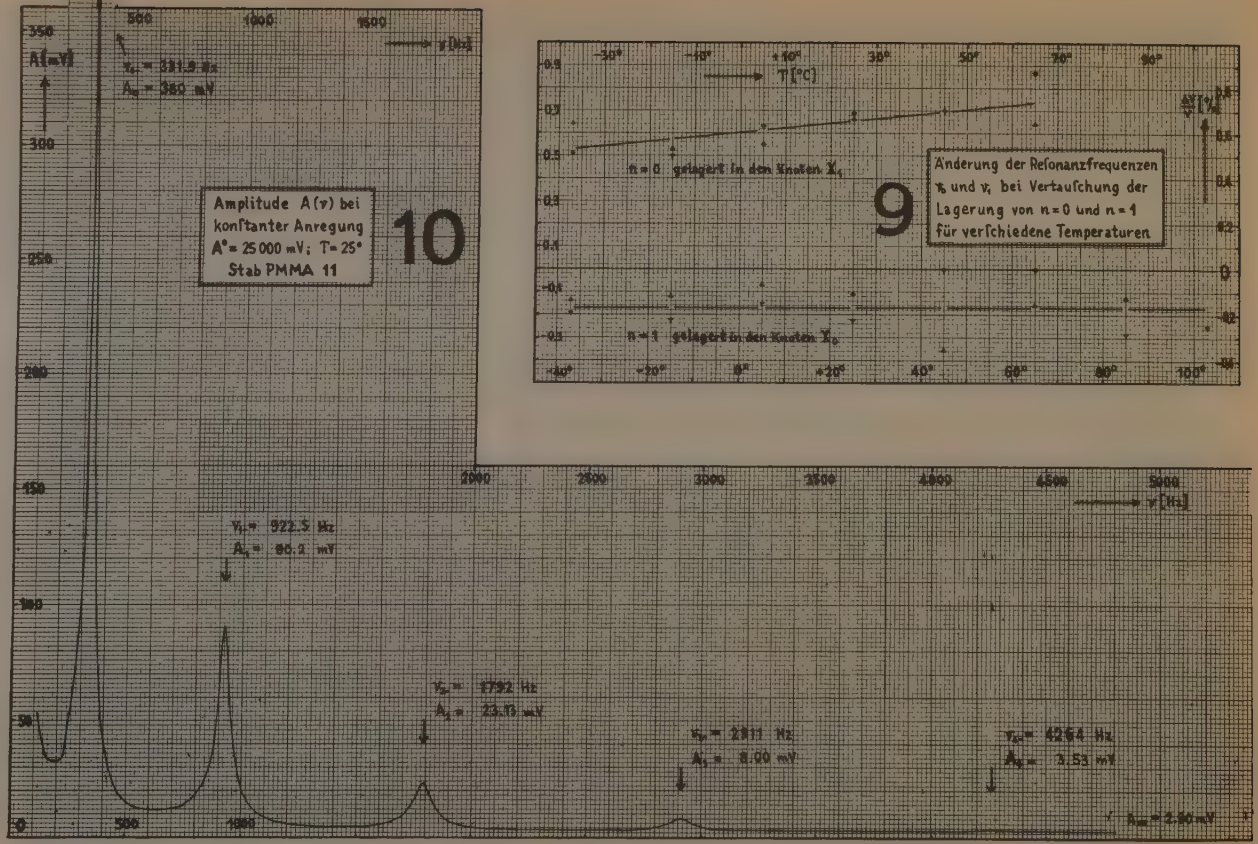
7

Lagerungsverschiebung und Gleicheit der in verschiedenen Knotenpaaren gemessenen Resonanzfrequenz Stab ALUII; R=1.071%; T=24°


Korrektur der Resonanzfrequenz
bei verschobener Lagerung:
8
Lagerungsverschiebung
Stab PMMA 18; T = 20°
5150
3460
2110
1070
410
400
390
0,20
0,30

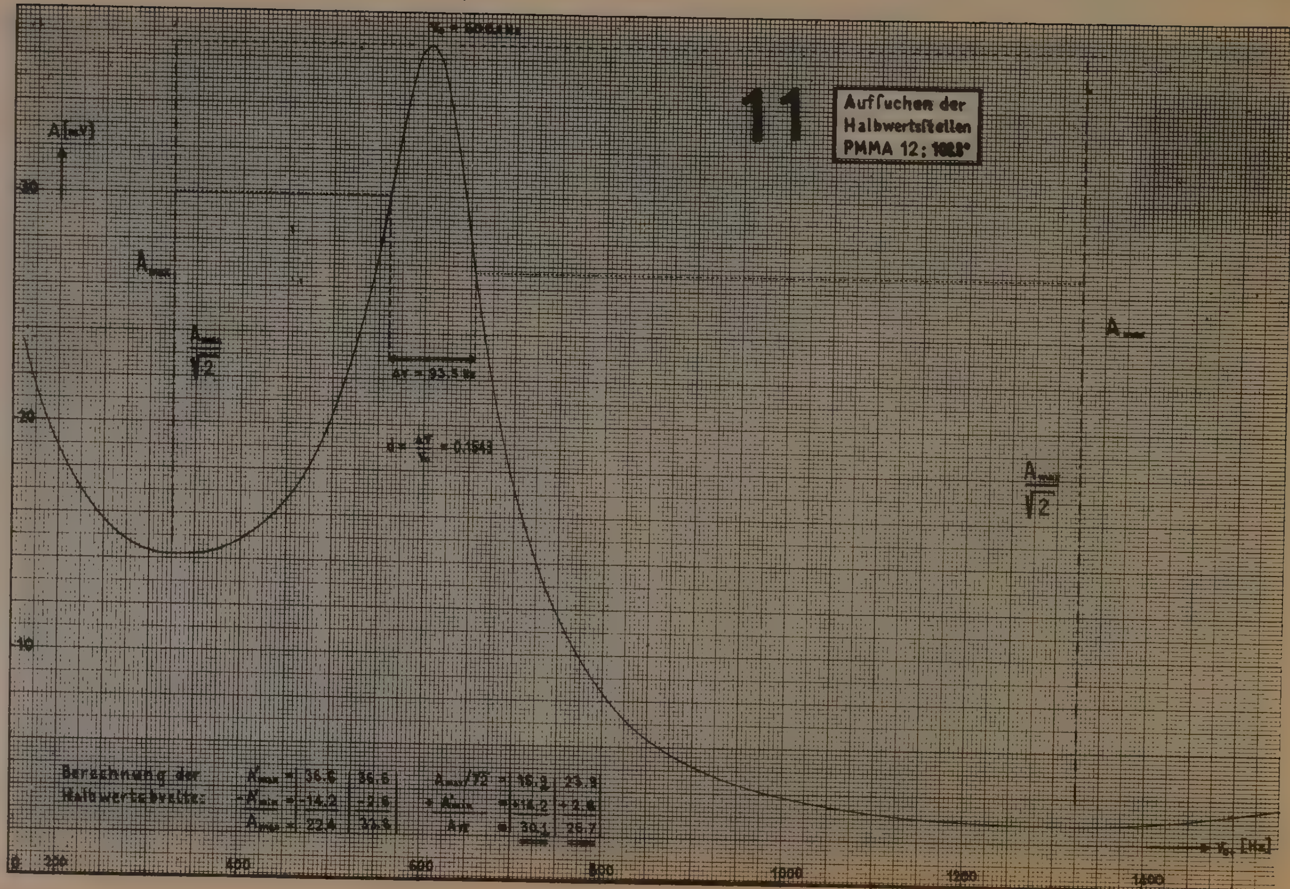
9

Änderung der Resonanzfrequenzen ν_0 und ν_1 bei Vertauschung der Lagerung von n = 0 und n = 1 für verschiedene Temperaturen

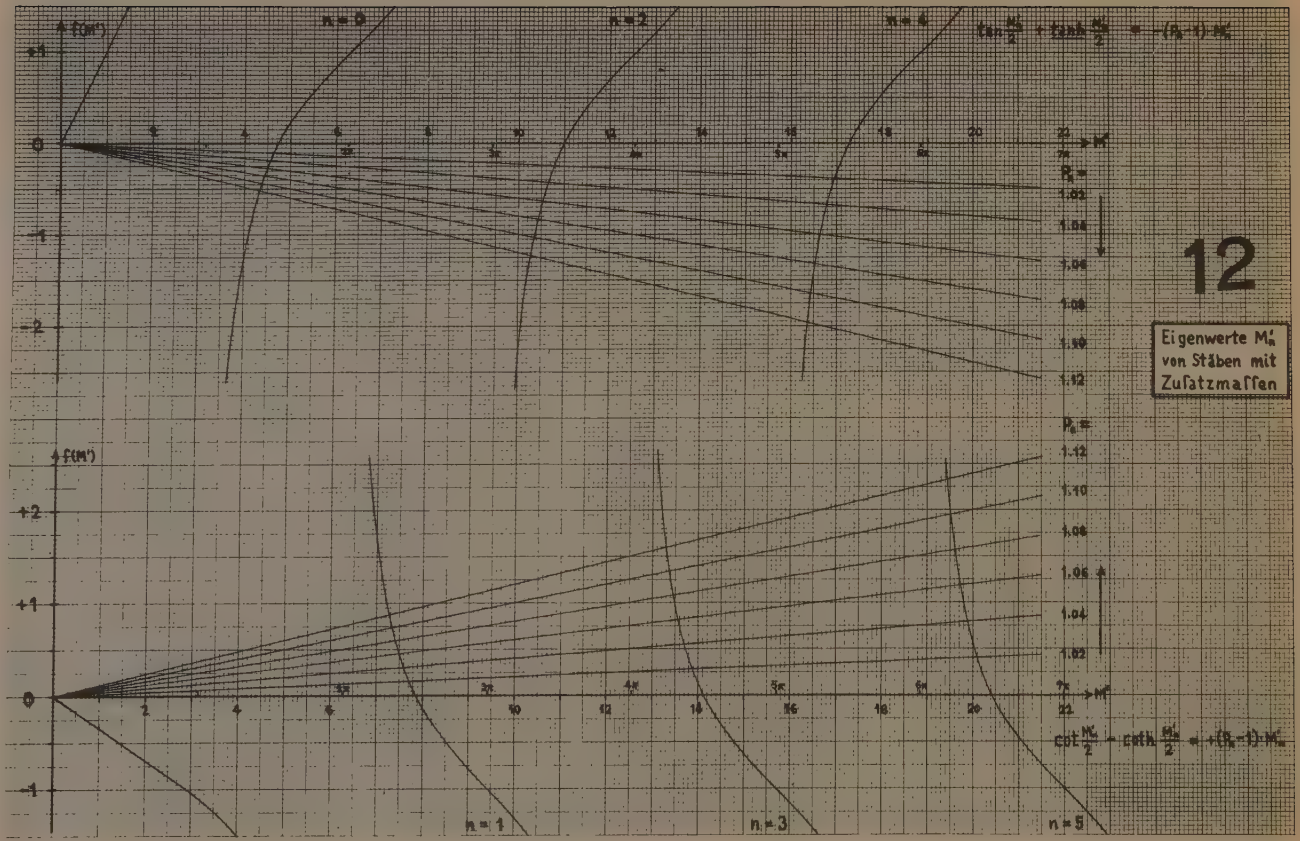


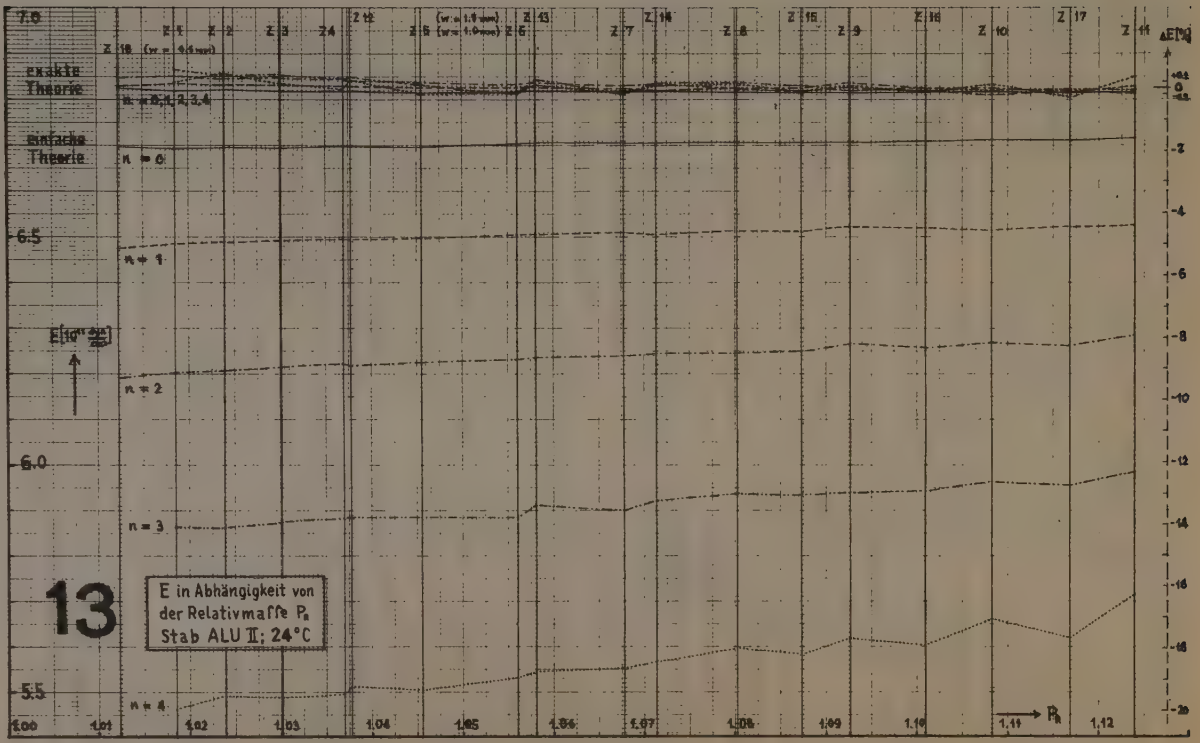
10

Amplitude A(ν) bei konstanter Anregung
A° = 25000 mV; T = 25°
Stab PMMA 11



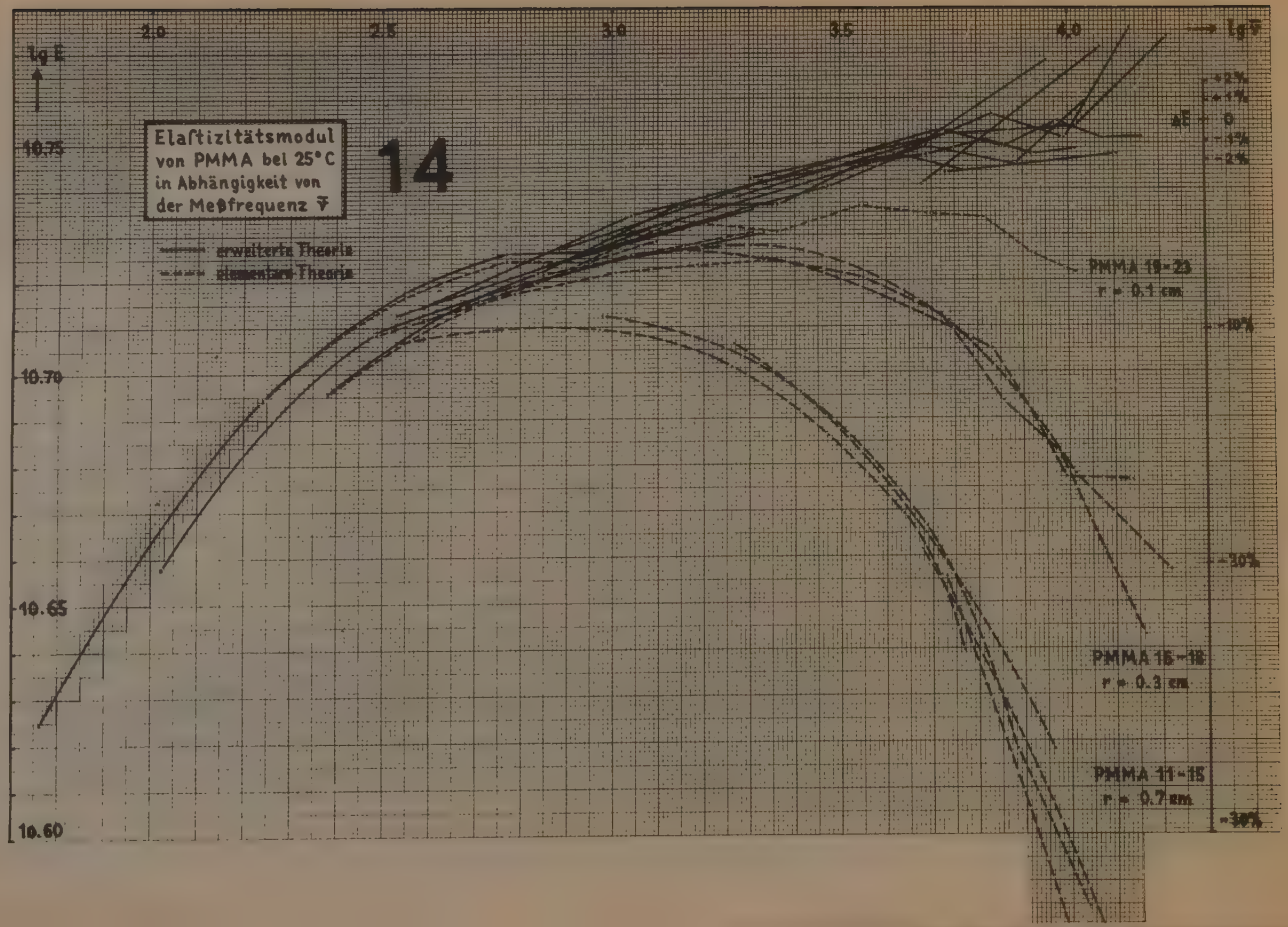
11
Auffuchen der
Halbwertsstellen
PMMA 12;
A [mV]
30
20
10
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
[Hz]

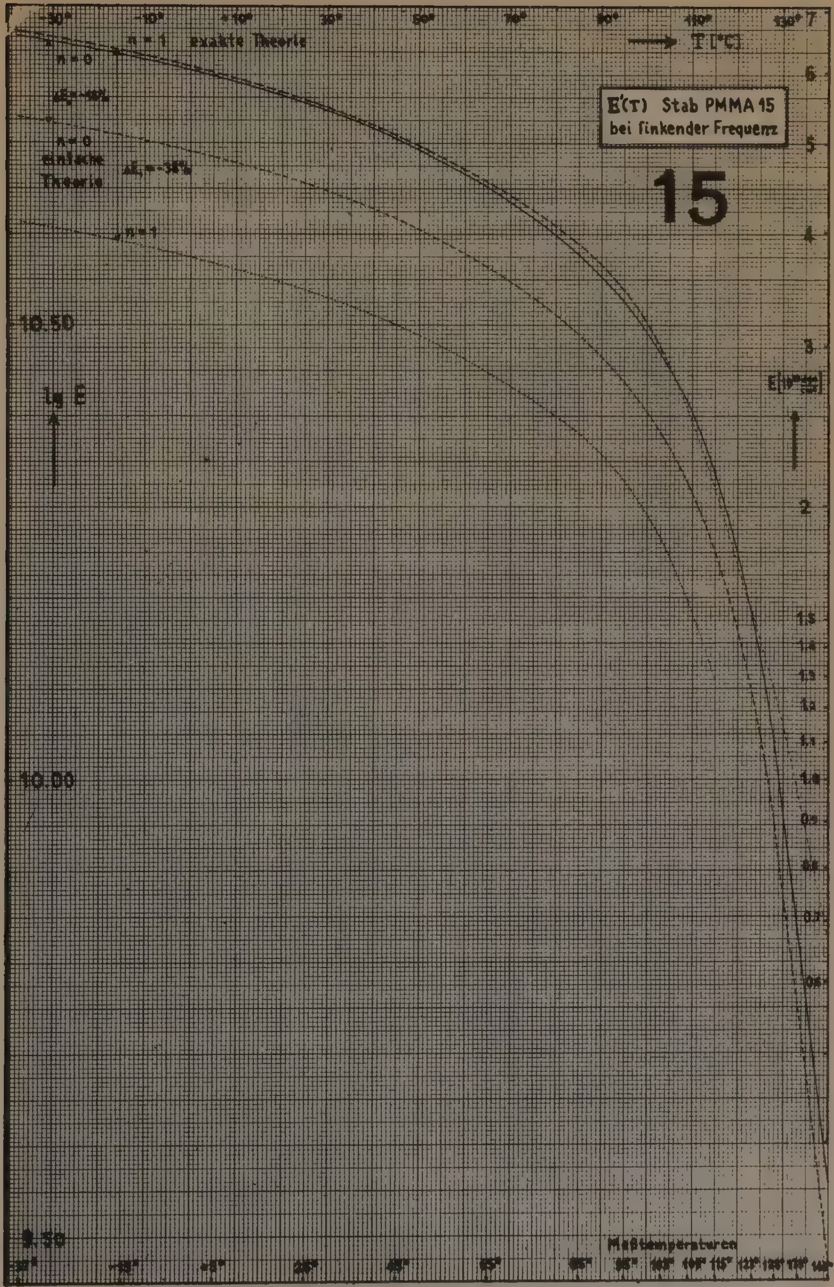

f(M')
n = 0
n = 2
n = 4
$\tan\frac{M'_n}{2} + \tanh\frac{M'_n}{2} = -(P_n-1)\cdot M'_n$
$P_n =$
1.02
1.04
1.06
1.08
1.10
1.12
M'_n
12
Eigenwerte M'_n von Stäben mit Zusatzmassen
f(M')
$P_n =$
1.12
1.10
1.08
1.06
1.04
1.02
M'_n
$\cot\frac{M'_n}{2} - \coth\frac{M'_n}{2} = +(P_n-1)\cdot M'_n$
n = 1
n = 3
n = 5



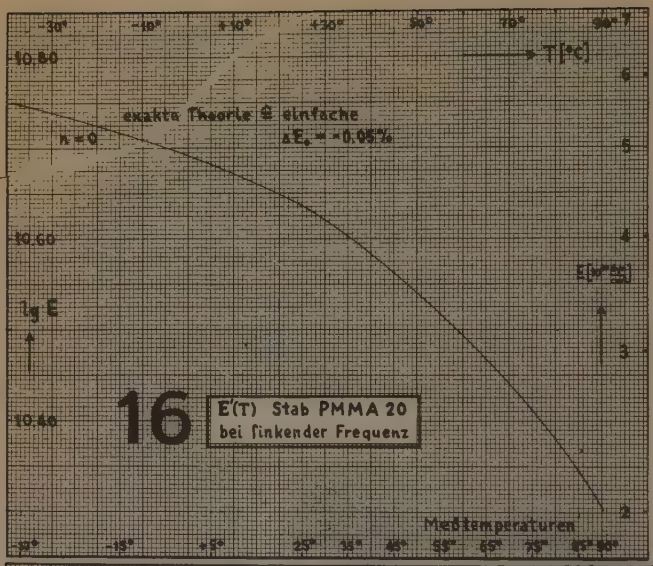
13

E in Abhängigkeit von der Relativmasse P_R
Stab ALU II; 24°C

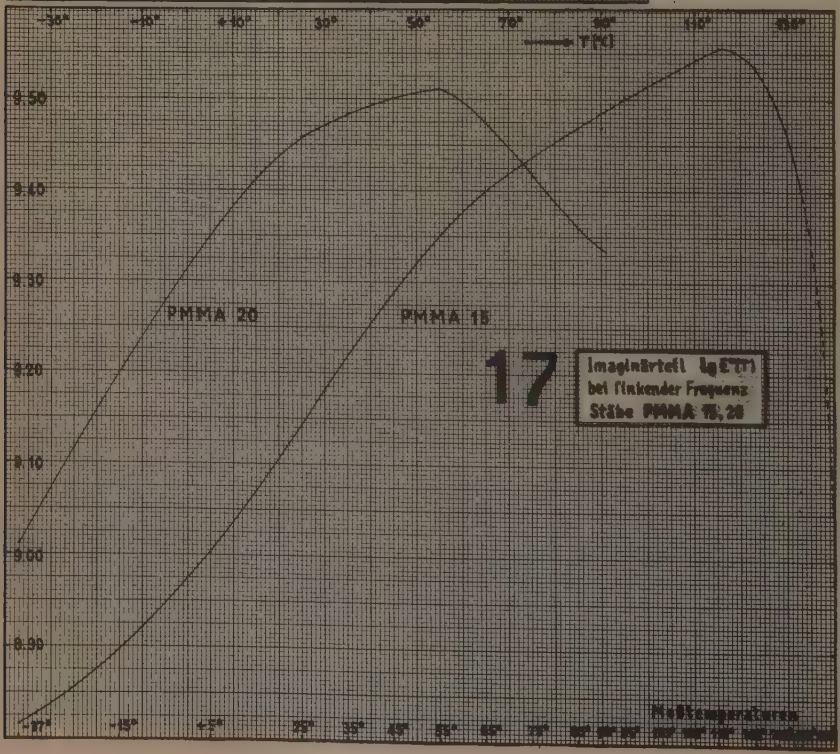

Elastizitätsmodul von PMMA bei 25°C in Abhängigkeit von der Meßfrequenz ν
14
erweiterte Theorie
elementare Theorie
lg E
10.75
10.70
10.65
10.60
2.0
2.5
3.0
3.5
4.0
lg ν
+2%
+1%
ΔE = 0
-1%
-2%
PMMA 19-23
r = 0.1 cm
-10%
-20%
PMMA 15-18
r = 0.3 cm
PMMA 11-15
r = 0.7 cm
-30%



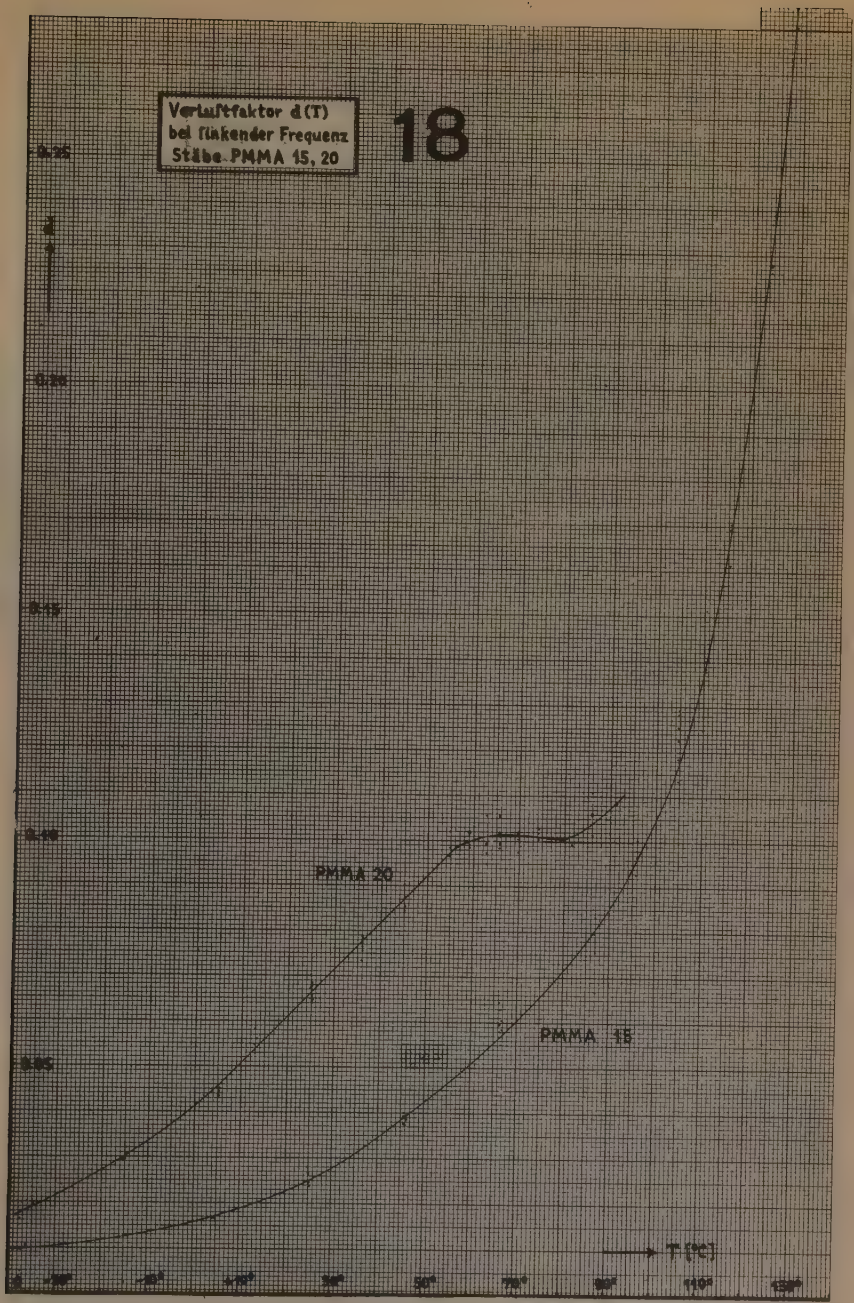
E'(T) Stab PMMA 15
bei sinkender Frequenz
15
n = 1 exakte Theorie
n = 0
n = 0
einfache Theorie
n = 1
T [°C]
lg E
10.50
10.00
9.50
Meßtemperaturen

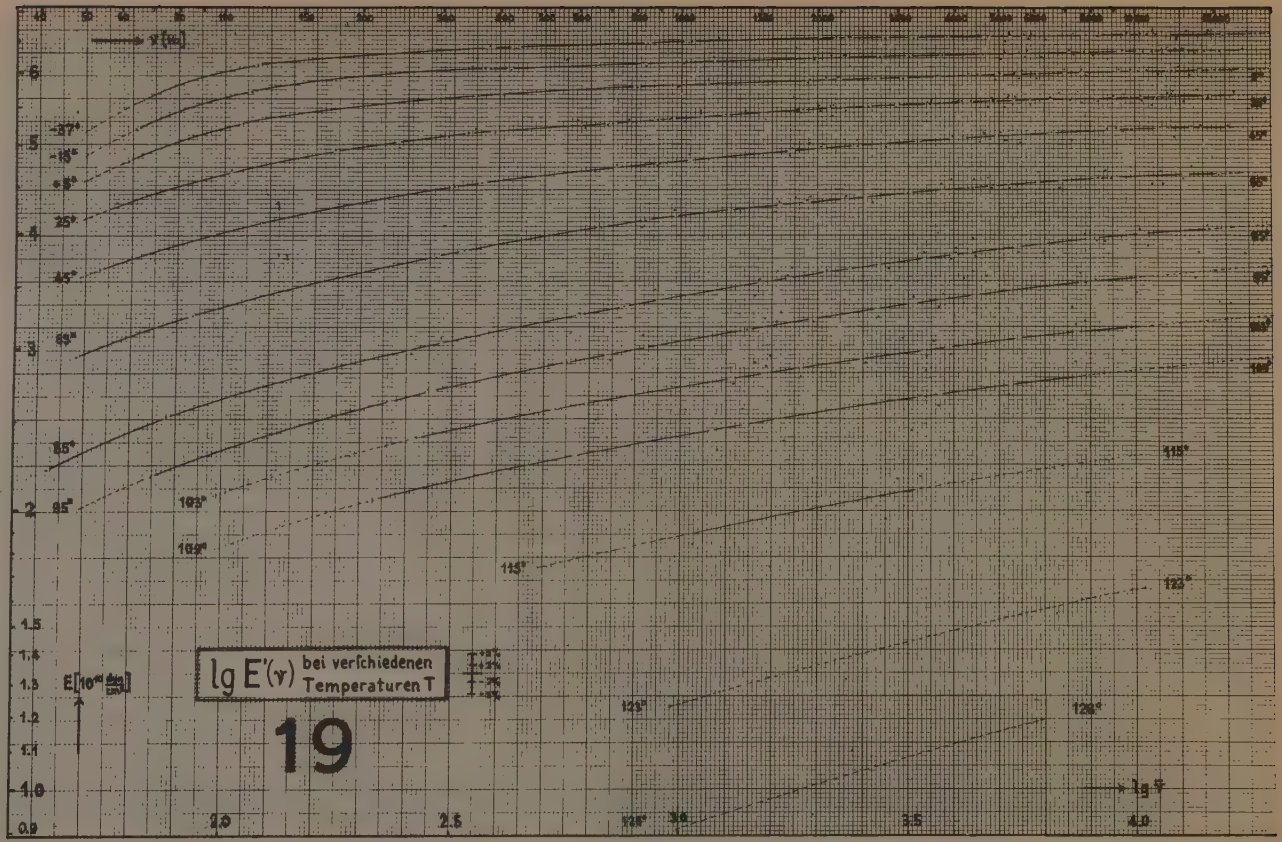


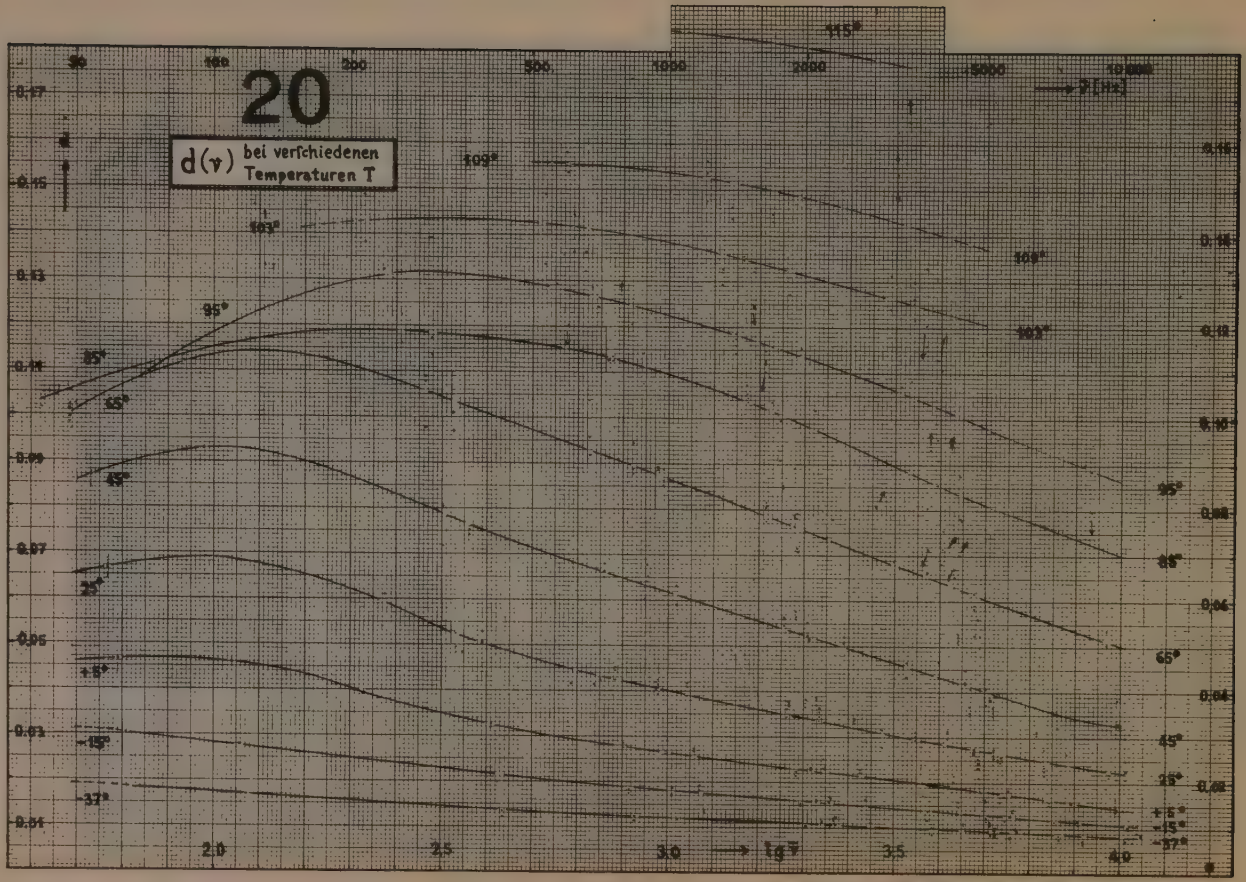
16 E'(T) Stab PMMA 20 bei linkender Frequenz

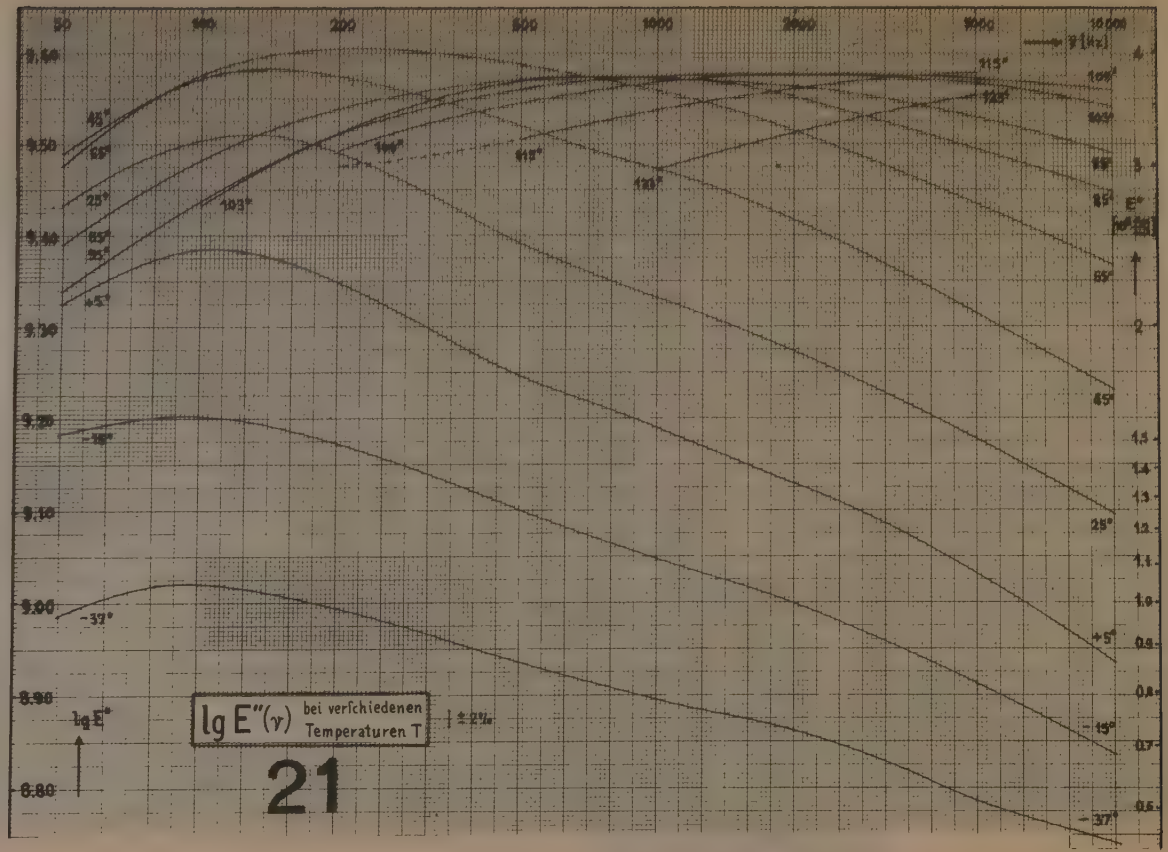


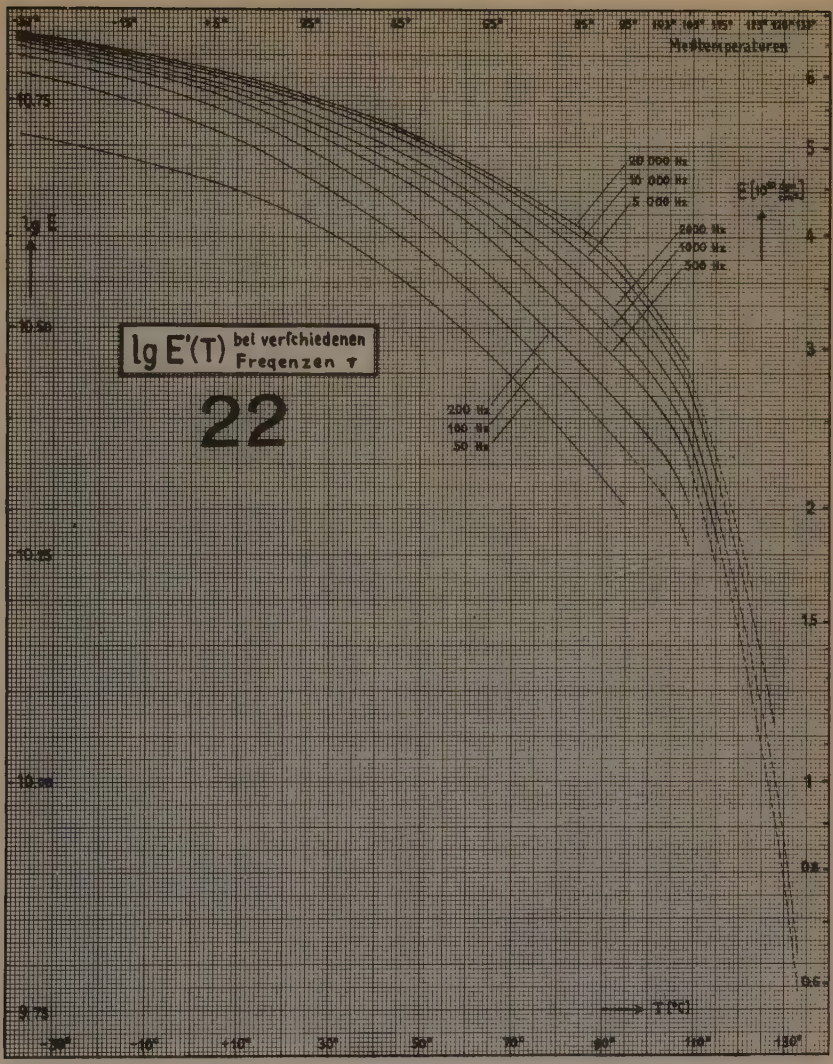
17 Imaginärteil lg E''(T) bei linkender Frequenz Stäbe PMMA 15, 20

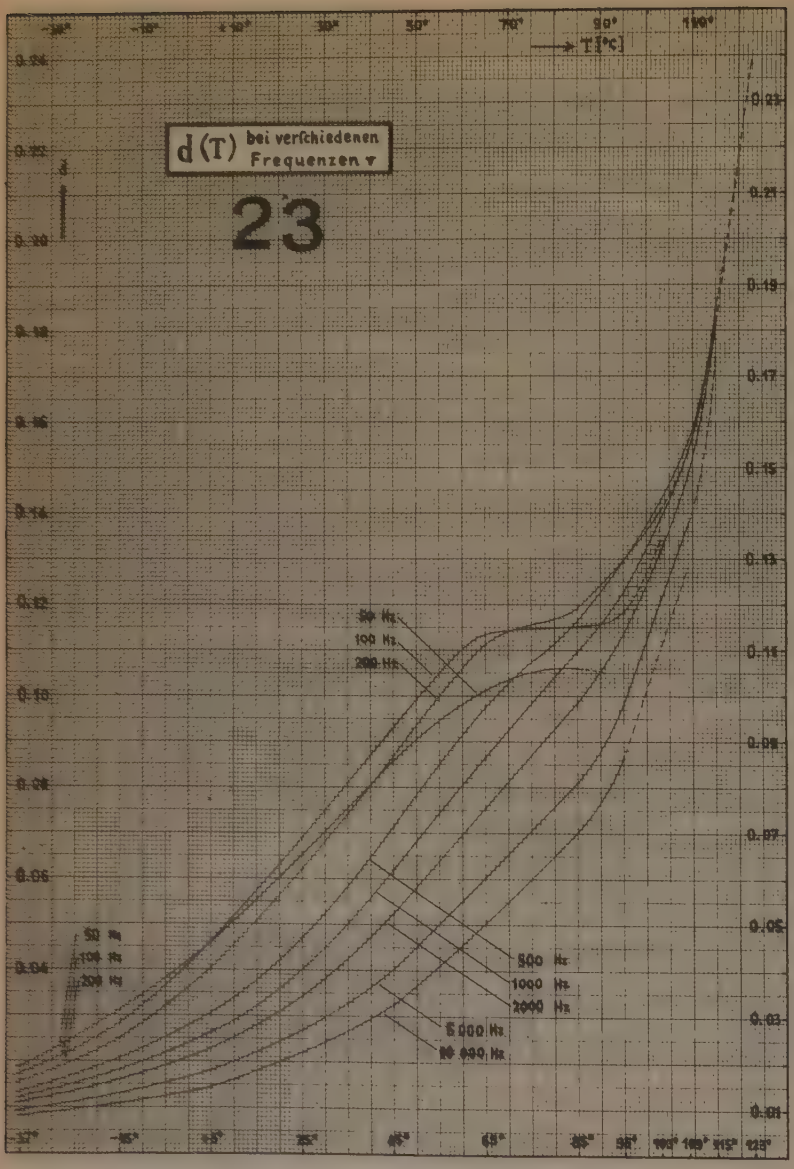

Verlustfaktor d(T)
bei fallender Frequenz
Stäbe PMMA 15, 20
18
d
PMMA 20
PMMA 15
T [°C]

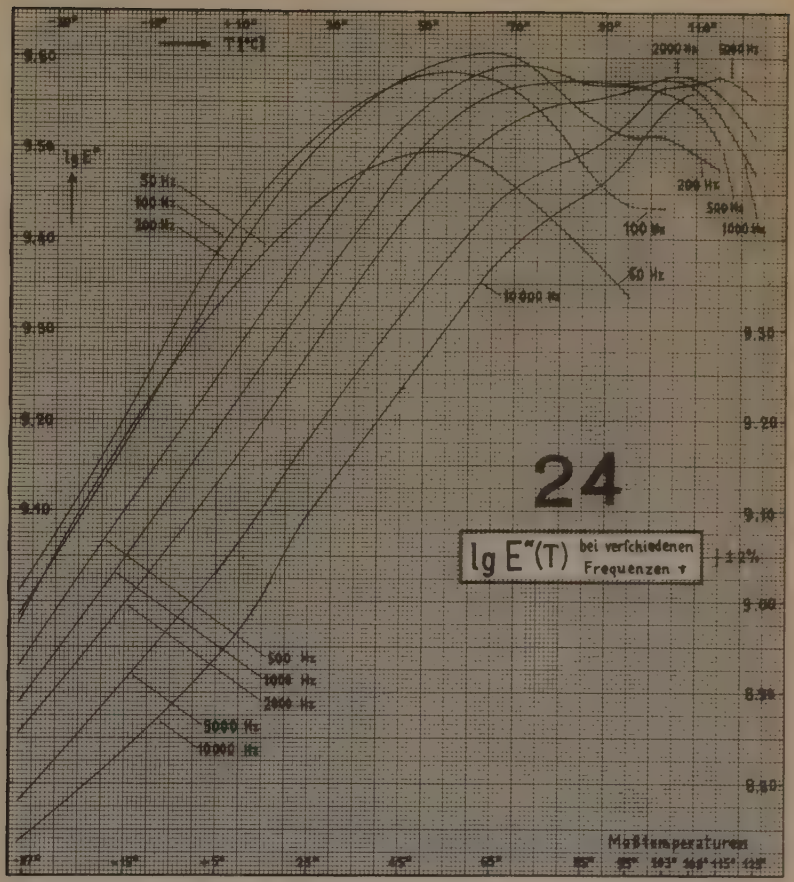

lg E'(ν) bei verschiedenen Temperaturen T
19

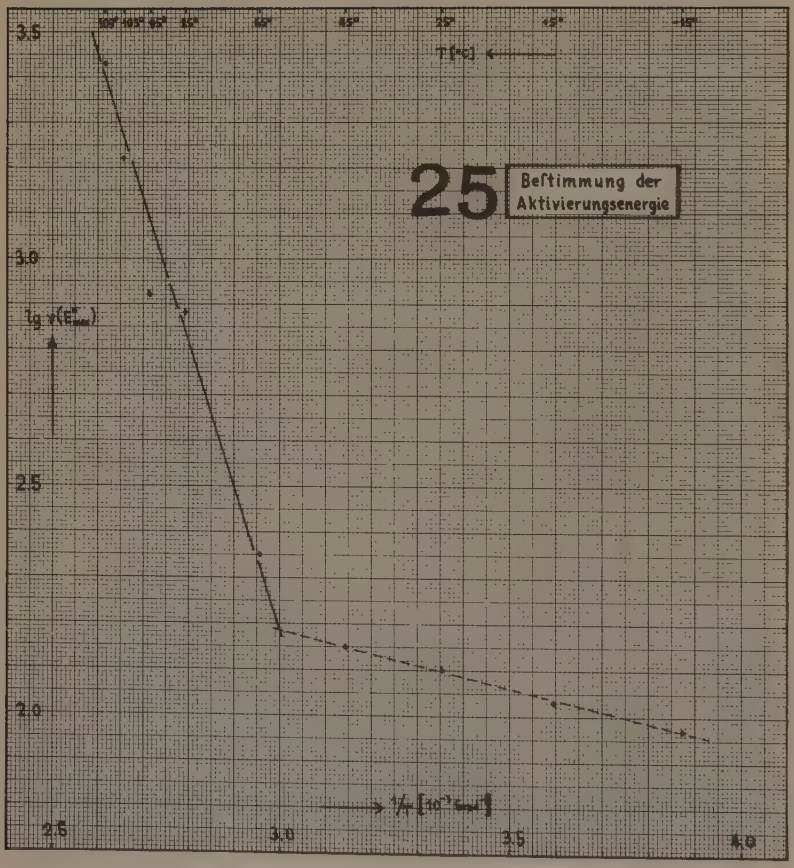

20
d(ν) bei verschiedenen Temperaturen T
115°
109°
103°
95°
85°
75°
65°
55°
45°
35°
25°
+5°
-15°
-37°
ν [Hz]
lg ν


lg E"(ν) bei verschiedenen Temperaturen T
± 2%
lg E"
E"
ν [Hz]
21


Meßtemperaturen
20 000 Hz
10 000 Hz
5 000 Hz
2000 Hz
1000 Hz
500 Hz
250 Hz
100 Hz
50 Hz
lg E
E' [10⁸ dyn/cm²]
lg E'(T) bei verschiedenen Frequenzen ν
22
T [°C]


d (T) bei verschiedenen Frequenzen
23
T [°C]
50 Hz
100 Hz
200 Hz
500 Hz
1000 Hz
2000 Hz
5 000 Hz
10 000 Hz


T [°C]
lg E"
50 Hz
100 Hz
200 Hz
500 Hz
1000 Hz
2000 Hz
5000 Hz
10000 Hz
9.60
9.50
9.40
9.30
9.20
9.10
9.00
8.90
8.80
24
lg E"(T) bei verschiedenen Frequenzen ν
± 2%
Maßtemperaturen


25
Bestimmung der Aktivierungsenergie
T [°C]
3,5
3,0
2,5
2,0
2,5
3,0
3,5
4,0

Lebenslauf

Am 6. April 1936 wurde ich, Frank-Peter Wolf, als Sohn des Regierungsrates Dr. Gerhard Wolf und seiner Ehefrau Susanne, geb. Fischer, in Leipzig geboren. -
Dort verlebte ich meine Kindheit, abgesehen von einer zweijährigen Evakuierung während des Krieges. Von 1946 bis 1950 besuchte ich die Thomasschule in Leipzig. -
Nach Rückkehr meines Vaters aus sowjetischer Gefangenschaft siedelten wir 1950 nach West-Berlin über. Hier gehörte ich bis zum Abitur 1956 dem altsprachlichen Zweig der Schadow-Schule in Berlin-Zehlendorf an. -

Seit dem Sommersemester 1956 studierte ich an der Freien Universität Berlin Physik und legte dort 1958 die Diplomvorprüfung und 1963 die Diplomprüfung ab.
Meine akademischen Lehrer waren in Physik die Herren Professoren H. Lassen, R. Honerjäger und M. Päsler; in Chemie K. F. Jahr und W. Lautsch; in Physikalischer Chemie K. Ueberreiter und I. Stranski; in Mathematik A. Dinghas sowie in Geologie M. Richter.
An die Physik und Chemie der Polymeren wurde ich von Herrn Prof. K. Ueberreiter herangeführt, unter dessen Anleitung später meine Diplomarbeit im Fritz-Haber-Institut der Max-Planck-Gesellschaft entstand.
Im gleichen Institut betreute Herr Prof. K. Ueberreiter ab 1964 die vorliegende Dissertation. Seitdem bin ich als Assistent seiner Vorlesungen "Chemie und Physik der Kunststoffe" und "Einführung in die Physikalische Chemie" an der Technischen Universität Berlin tätig.

Druck:

ERNST-REUTER-GESELLSCHAFT
der Förderer und Freunde der Freien Universität Berlin e.V.

DISSERTATIONS-DRUCKSTELLE

1 Berlin 33, Garystr. 45